1-1 銳角的正弦、餘弦及正切

基礎題

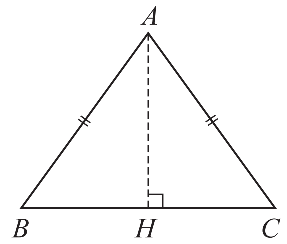
1. 右圖是由兩個直角三角形堆疊而成，且 $\overline{OC}=8$，試問 $\overline{AB}$ 的長為

(1) $\sqrt{3}$　(2) 2　(3) $2\sqrt{3}$　(4) 4 .

解：直角 $\triangle OBC$ 中，因 $\overline{OB}=\overline{OC}\cos 60°=4$，

直角 $\triangle OAB$ 中，因 $\overline{AB}=\overline{OB}\sin 30°=2$，

2. 有一等腰三角形底邊 $\overline{BC}$ 的長為 10，頂角為 $72°$，試問 $\triangle ABC$ 的高 $\overline{AH}$ 長為



(1) $5\sin 36°$　(2) $5\sin 54°$　(3) $5\tan 36°$　(4) $5\tan 54°$.

解：直角 $\triangle ABH$ 中，$\angle BAH=36°$，$\angle ABH=54°$，

$\tan 54°=\dfrac{\overline{AH}}{\overline{BH}}=\dfrac{\overline{AH}}{5}$，得 $\overline{AH}=5\tan 54°$，

3. 已知 $0<\alpha<45°<\beta<90°$，試問下列何者正確？

(1) $\sin\alpha<\sin\beta$　(2) $\cos\alpha<\cos\beta$　(3) $\sin\alpha>\cos\alpha$　(4) $\sin\beta<\cos\beta$.

解：(1) $\sin\theta$ 隨 θ 增大而增大，知 $\sin\alpha<\sin\beta$.

(2) $\cos\theta$ 隨 θ 增大而減少，知 $\cos\alpha>\cos\beta$.

(3)(4) $0<\alpha<45°<\beta<90°$，知 $0<\sin\alpha<\dfrac{\sqrt{2}}{2}<\sin\beta<1$，$0<\cos\beta<\dfrac{\sqrt{2}}{2}<\cos\alpha<1$，得

$\sin\alpha<\dfrac{\sqrt{2}}{2}<\cos\alpha$ 且 $\sin\beta>\dfrac{\sqrt{2}}{2}>\cos\beta$.

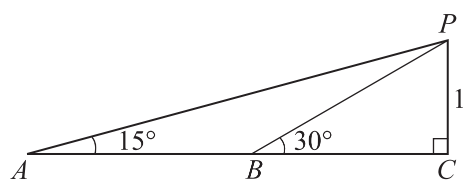
4. 試求下列銳角 θ 的值：

(1) $\sin\theta=\cos 41°$.　(2) $\cos\theta=\sin 37°$.

解：(1) $\cos 41°=\cos(90°-49°)=\sin 49°$，得 $\theta=49°$.

(2) $\sin 37°=\sin(90°-53°)=\cos 53°$，得 $\theta=53°$.

5. 請用右圖，求得 $\tan 15°$ 與 $\tan 75°$ 的值 .



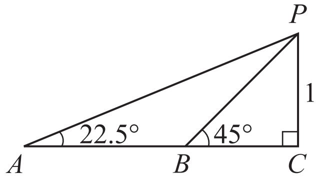
解：直角 $\triangle PBC$ 中，令 $\overline{BC}=\sqrt{3}$，$\overline{BP}=2$，$\overline{PC}=1$，

等腰 $\triangle PAB$ 中，$\overline{AB}=\overline{BP}=2$，

$\overline{AC}=\overline{AB}+\overline{BC}=2+\sqrt{3}$，

得 $\tan 15^\circ=\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}$， 又 $\angle APC=75^\circ$， 得 $\tan 75^\circ=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{PC}}=2+\sqrt{3}$ ．

6. 請用右圖，求得 $\tan 22.5^\circ$ 與 $\tan 67.5^\circ$ 的值．



解： 直角△PBC 中，令 $\overline{BC}=1$， $\overline{BP}=\sqrt{2}$， $\overline{PC}=1$，

等腰△PAB 中， $\overline{AB}=\overline{BP}=\sqrt{2}$， $\overline{AC}=\overline{AB}+\overline{BC}=\sqrt{2}+1$，

得 $\tan 22.5^\circ=\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}-1$，

又 $\angle APC=67.5^\circ$， 得 $\tan 67.5^\circ=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{PC}}=\sqrt{2}+1$ ．

進階題

1. 試求下列各式的值：

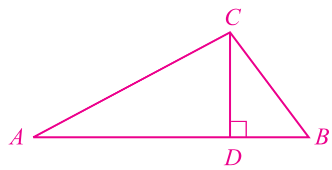
(1) $\cos^2 41^\circ+\cos^2 49^\circ$ ． (2) $\sin^2 15^\circ+\sin^2 35^\circ+\sin^2 55^\circ+\sin^2 75^\circ$ ．

解： (1) $\cos^2 41^\circ+\cos^2 49^\circ=\cos^2 41^\circ+\sin^2 41^\circ=1$ ．

(2) $\sin^2 15^\circ+\sin^2 35^\circ+\sin^2 55^\circ+\sin^2 75^\circ$

$=\sin^2 15^\circ+\sin^2 35^\circ+\cos^2 35^\circ+\cos^2 15^\circ=2$ ．

2. 在△ABC 中， $\overline{AC}=17$， $\tan A=\dfrac{8}{15}$， $\tan B=\dfrac{4}{3}$， $\overline{CD}\perp\overline{AB}$，試求 $\overline{AB}$ 的長．

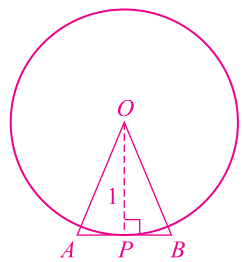


解： $\tan A=\dfrac{8}{15}$， 知 $\sin A=\dfrac{8}{17}$， 得 $\overline{AD}=15$， $\overline{CD}=8$，

由 $\tan B=\dfrac{4}{3}$， 得 $\overline{BD}=6$， 故 $\overline{AB}=\overline{AD}+\overline{BD}=21$ ．

3. 設一圓的半徑為 1，試問其外接正八邊形的周長．

（已知 $\tan 22.5^\circ=\sqrt{2}-1$， $\tan 67.5^\circ=\sqrt{2}+1$ ）



解： △OAB 中， $\overline{OP}\perp\overline{AB}$， $\angle AOB=45^\circ$，

$\overline{OP}=1$， $\angle AOP=22.5^\circ$， $\tan 22.5^\circ=\dfrac{\overline{AP}}{\overline{OP}}=\dfrac{\overline{AP}}{1}$，

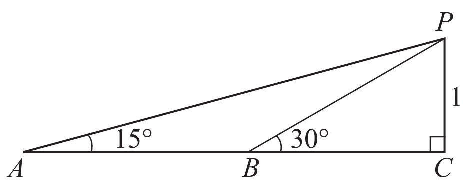
得 $\overline{AP}=\sqrt{2}-1$， $\overline{AB}=2(\sqrt{2}-1)$，

故正八邊形周長為 $8\overline{AB}=16(\sqrt{2}-1)$ ．

4. 已知 $(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2=8+4\sqrt{3}$，利用右圖，試求：

(1) $\overline{AP}$ 的長．

(2) $\sin 15^\circ$ 與 $\cos 15^\circ$ 的值．

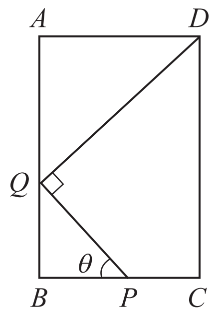


解：(1) $\overline{AC}=\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{BP}+\overline{BC}=2+\sqrt{3}$，

$\overline{AP}^2=\overline{AC}^2+\overline{CP}^2=(2+\sqrt{3})^2+1^2=8+4\sqrt{3}=(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2$， 得 $\overline{AP}=\sqrt{6}+\sqrt{2}$.

(2) $\sin 15°=\dfrac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$， $\cos 15°=\dfrac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

5. 長方形 $ABCD$ 中，$\angle PQD=90°$，$\overline{PQ}=3$，$\overline{QD}=5$，$\angle BPQ=\theta$，若 $\overline{CD}=a\sin\theta+b\cos\theta$，則 $a=$ __3__，$b=$ __5__ .



解：$\triangle BPQ$ 中，$\overline{BQ}=3\sin\theta$，

$\triangle AQD$ 中，$\angle AQD=\theta$，$\overline{QA}=5\cos\theta$，

因 $\overline{CD}=\overline{AB}=\overline{BQ}+\overline{QA}=3\sin\theta+5\cos\theta$，得 $a=3$，$b=5$.

6. 設 θ 爲一銳角且 $\sin\theta-\cos\theta=\dfrac{1}{5}$，試求下列各式的值：

(1) $\sin\theta\cos\theta$.　(2) $\sin\theta$.

解：(1)因 $(\sin\theta-\cos\theta)^2=1-2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{25}$， 得 $\sin\theta\cos\theta=\dfrac{12}{25}$.

(2) $(\sin\theta+\cos\theta)^2=1+2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{49}{25}$，知 $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{7}{5}$，（$-\dfrac{7}{5}$不合）

又 $\sin\theta-\cos\theta=\dfrac{1}{5}$，得 $\sin\theta=\dfrac{4}{5}$.

7. 試問 $\sin^2 10°+\sin^2 20°+\sin^2 30°+\sin^2 40°+\sin^2 50°+\sin^2 60°+\sin^2 70°+\sin^2 80°$ 的和 .

解：由餘角關係式 $\sin(90°-\theta)=\cos\theta$，

$\sin 80°=\cos 10°$，$\sin 70°=\cos 20°$，$\sin 60°=\cos 30°$，$\sin 50°=\cos 40°$，

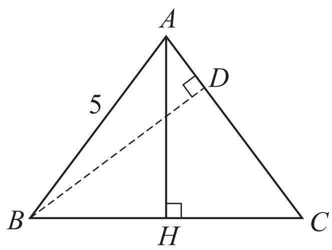
原式 $=(\sin^2 10°+\sin^2 80°)+(\sin^2 20°+\sin^2 70°)+(\sin^2 30°+\sin^2 60°)+(\sin^2 40°+\sin^2 50°)$

$=(\sin^2 10°+\cos^2 10°)+(\sin^2 20°+\cos^2 20°)+(\sin^2 30°+\cos^2 30°)+(\sin^2 40°+\cos^2 40°)$

$=4$.

8. 等腰 $\triangle ABC$ 中，$\overline{AB}=5$，$\overline{AC}=5$，$\overline{BC}=6$，試求各式的值：

(1) $\tan B$.　(2) $\tan A$.



解：(1)因 $\overline{BC}=6$，知 $\overline{BH}=3$，$\overline{AH}=4$， 故 $\tan B=\dfrac{4}{3}$.

(2) $\triangle ABC$ 的面積 $=\dfrac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{AH}=12$，

$\triangle=\dfrac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{BD}$，$12=\dfrac{1}{2}\times 5\times\overline{BD}$，$\overline{BD}=\dfrac{24}{5}$，

直角 $\triangle ABD$ 中，$\overline{AB}=5$，$\overline{BD}=\dfrac{24}{5}$，得 $\overline{AD}=\dfrac{7}{5}$，故 $\tan A=\dfrac{24}{7}$.

9. 已知θ為一銳角且$\sin\theta+2\cos\theta=2$，試求各式的值：

(1) $\cos\theta$ ．　(2) $\sin\theta$ ．

解：(1) $\sin\theta=2-2\cos\theta$，兩邊平方得$\sin^2\theta=(2-2\cos\theta)^2$，

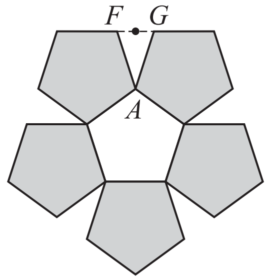
代入$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$，得$5\cos^2\theta-8\cos\theta+3=0$，$\cos\theta=\dfrac{3}{5}$或 1（不合）.

(2) $\sin\theta=2-2\cos\theta=\dfrac{4}{5}$ ．

情境模擬題

1. 大明以 6 張同樣大小的正五邊形紙片在平面上拼成一朵花，已知正五邊形的邊長為 1，則兩片花瓣間的距離$\overline{FG}=$ $\underline{\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}}$ ．

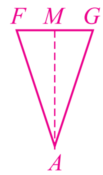
（$\sin 18^\circ=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$）



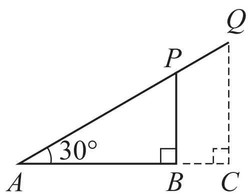
解：因正五邊形的每一內角為108°，知$\angle FAG=36^\circ$ ．

由$\overline{AG}=1$，$\angle GAM=18^\circ$，

得$\overline{FG}=2\overline{GM}=2\cdot\overline{AG}\cdot\sin 18^\circ=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ ．



2. 將一長為 8 公尺的竹竿，斜靠在垂直地面高為 3 公尺的牆頭，有部分伸出牆外．假設竹竿與地面成夾角30°，竹竿伸出牆外部分，於日正當中時，在地面的投影為 $\underline{\sqrt{3}}$ ．

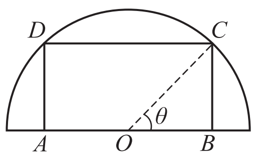


解：$\triangle ABP$中，$\overline{BP}=3$，得$\overline{AB}=3\sqrt{3}$，

$\triangle ACQ$中，$\overline{AQ}=8$，得$\overline{AC}=4\sqrt{3}$，

投影$\overline{BC}=\overline{AC}-\overline{AB}=4\sqrt{3}-3\sqrt{3}=\sqrt{3}$ ．

3. 在半徑為 1 的半圓內作一矩形$ABCD$，且一邊$\overline{AB}$落在直徑上，已知矩形$ABCD$的周長為 4，試求矩形$ABCD$的面積．



解：$\overline{OC}=1$，得$\overline{OB}=\cos\theta$，$\overline{BC}=\sin\theta$，

得矩形周長為$2\sin\theta+4\cos\theta=4$，

即$\sin\theta+2\cos\theta=2$，得$\cos\theta=\dfrac{3}{5}$，$\sin\theta=\dfrac{4}{5}$，

矩形$ABCD$的面積為$\overline{AB}\cdot\overline{BC}=2\cos\theta\cdot\sin\theta=\dfrac{24}{25}$ ．