

第四章 總複習

基礎題

< 單選題 >

1. 若 $\Gamma : \sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2} = |x+2|$ 為一拋物線方程式，試問哪一選項正確？
(1) Γ 的圖形開口向左 (2) 頂點的坐標為 $(2, 3)$ (3) 準線方程式為 $x+2=0$
(4) 對稱軸方程式為 $x+2=0$ (5) 圖形對稱於 $y=2$.

解：拋物線的準線為 $x+2=0$ ，焦點為 $F(2, 3)$ ，得方程式 $(y-3)^2 = 8x$.

(1) 開口向右，(2) 頂點 $A(0, 3)$ ，(3) 準線 $x+2=0$ ，
(4) 對稱軸 $y=3$ ，(5) 對稱於 $y=3$ ，故選(3) .

2. 令橢圓 $\Gamma_1 : \frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$ ， $\Gamma_2 : \frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 2$ ， $\Gamma_3 : \frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = \frac{2x}{5}$ 的長軸長分別為 l_1, l_2, l_3 . 請問下列哪一個選項是正確的？
(1) $l_1 = l_2 = l_3$ (2) $l_1 = l_2 < l_3$ (3) $l_1 < l_2 < l_3$ (4) $l_1 = l_3 < l_2$
(5) $l_1 < l_3 < l_2$. 【99 學測】

解： $\Gamma_1 : \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ ， $l_1 = 2a = 10$ ，

$\Gamma_2 : \frac{x^2}{50} + \frac{y^2}{18} = 1$ ， $l_2 = 2a = 10\sqrt{2}$ ，

$\Gamma_3 : \frac{(x-5)^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ ， $l_3 = 2a = 10$ ，

知 $l_1 = l_3 < l_2$ ，故選(4) .

3. 坐標平面上滿足方程式 $(\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{4^2})(\frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{4^2}) = 0$ 的點 (x, y) 所構成的圖形為
(1) 只有原點 (2) 橢圓及原點 (3) 兩條相異直線 (4) 橢圓及雙曲線
(5) 雙曲線及原點 . 【100 學測】

解：滿足 $\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{4^2} = 0$ 或 $\frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{4^2} = 0$ 的所有點，

得原點 $(0, 0)$ 及 $4x+3y=0$ ， $4x-3y=0$ ，

但原點在兩直線的交點上，知圖形是兩條相異直線，故選(3) .

< 多選題 >

4. 直線 $y = x$ 與下列哪些曲線的交點恰兩個？

(1) $x^2 = 4y$ (2) $x^2 + y^2 = 8$ (3) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ (4) $x^2 - y^2 = 1$.

解：將 $y = x$ 代入各方程式中，

(1) $(0, 0)$, $(4, 4)$ 兩交點 . (2) $(2, 2)$, $(-2, -2)$ 兩交點 .

(3) $(\frac{12}{5}, \frac{12}{5})$, $(-\frac{12}{5}, -\frac{12}{5})$ 兩交點 . (4) 不相交 .

故選(1)(2)(3) .

5. 已知一橢圓的長軸平行於 x 軸，中心為 $(1, 2)$ 且通過點 $(4, 6)$. 試問下列哪些點一定會在這橢圓上？

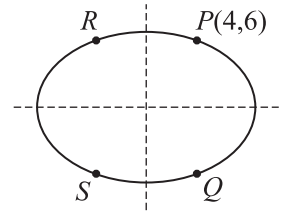
(1) $(-2, -2)$ (2) $(-2, 6)$ (3) $(4, -2)$ (4) $(5, 6)$.

解：橢圓對稱於直線 $y = 2$ 與 $x = 1$,

設 $P(4, 6)$, 當 P 在橢圓上時，

得 $Q(4, -2)$, $R(-2, 6)$, $S(-2, -2)$ 亦在橢圓上，

故選(1)(2)(3) .



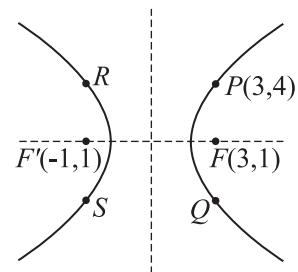
6. 雙曲線的兩焦點 $F'(-1, 1)$, $F(3, 1)$ 且通過點 $(3, 4)$, 試問雙曲線一定會通過哪些點？(1) $(1, 1)$ (2) $(-1, 4)$ (3) $(3, -2)$ (4) $(-1, -2)$.

解：雙曲線的中心為 $(1, 1)$, 對稱於 $x = 1$ 與 $y = 1$,

設 $P(3, 4)$, 當 P 在雙曲線上時，

得 $Q(3, -2)$, $R(-1, 4)$, $S(-1, -2)$ 亦在雙曲線上，

故選(2)(3)(4) .



進階題

1. 雙曲線 $\frac{x^2}{t} - \frac{y^2}{2} = 1$ 與橢圓 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{t^2} = 1$ 有相同焦點，則 t 值為 1 .

解：雙曲線中， $t > 0$ ，知開口向左右 .

設焦點 $F(c, 0)$ ，則雙曲線中 $c^2 = t + 2$ ，橢圓中 $c^2 = 4 - t^2$ ，
 $c^2 = t + 2 = 4 - t^2$ 得 $(t + 2)(t - 1) = 0$ ，但 $t > 0$ ，得 $t = 1$.

2. 在坐標平面上給定兩點 $A(-3, 0)$ 與 $B(3, 0)$. 考慮坐標平面上的點集合 $S = \{P \mid \triangle PAB \text{ 之面積為 } 12 \text{ 且周長為 } 16\}$ ，則 S 恰有 2 個點 .

解：由 $\triangle PAB = 12$ ， $\overline{AB} = 6$ ，

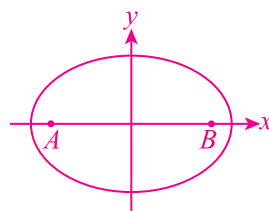
知 P 點在與直線 AB 距離為 4 的兩平行直線 L, L' 其中之一上，

由 $\triangle PAB$ 的周長 = 16， $\overline{AB} = 6$ ，

知 P 點是滿足 $\overline{PA} + \overline{PB} = 10$ 的橢圓 Γ ，

即 $a = 5$ ， $c = 3$ ， $b = 4$ ，

知 L, L' 與橢圓 Γ 各有 1 交點，知 S 恰含 2 個點 .



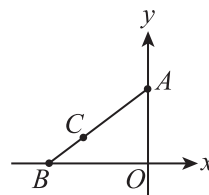
3. 如圖所示， \overline{AB} 的長度為 3 且 $\overline{AC} : \overline{CB} = 2 : 1$ ，保持 $\overline{AB} = 3$ 不變，當點 A 在 y 軸上進行上下移動，且點 B 在 x 軸上左右移動時，點 C 所經過的路徑會形成一圖形，試問此圖形所在方程式為

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$$

解：設 $A(0, a)$ ， $B(b, 0)$ ， $C(x, y)$ ，

由分點公式， $x = \frac{2}{3}b$ ， $y = \frac{1}{3}a$ ，即 $b = \frac{3}{2}x$ ， $a = 3y$ ，

$\overline{AB} = 3$ 不變，得 $a^2 + b^2 = 9$ ，知 $\frac{9}{4}x^2 + 9y^2 = 9$ ，得 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$.



4. 設 $E_1 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (其中 $a > 0$) 為焦點在 $(3, 0)$, $(-3, 0)$ 的橢圓；

E_2 : 焦點在 $(3, 0)$ 且準線為 $x = -3$ 的拋物線。

已知 E_1 , E_2 的交點在直線 $x = 3$ 上, 則 $a = \underline{3 + 3\sqrt{2}}$. 【100 學測】

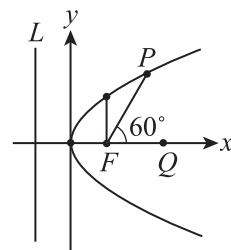
解：拋物線 $E_2 : y^2 = 12x$,

因 E_1 , E_2 的交點在直線 $x = 3$ 上,

由 $y^2 = 36$ 知交點 $A(3, 6)$, $B(3, -6)$, 令 $F(3, 0)$, $F'(-3, 0)$,

橢圓中 $\overline{AF} + \overline{AF'} = 6 + 6\sqrt{2} = 2a$, 得 $a = 3 + 3\sqrt{2}$.

5. 彗星 P 的軌道是以太陽為焦點的拋物線, 當彗星 P 與太陽的距離為 4 萬公里時, 二者的連線與拋物線對稱軸的夾角為 60° , 已知彗星逐漸接近太陽, 則當二者的連線與對稱軸垂直時, 兩者的距離為 2 萬公里。



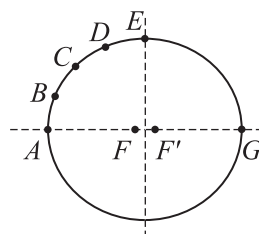
解：設 $F(c, 0)$, 則 $L : x = -c$,

又因 $\overline{PF} = 4$ 且 $\angle PFQ = 60^\circ$, 知 $P(c+2, 2\sqrt{3})$,

因 $d(P, L) = \overline{PF}$, 得 $(c+2) - (-c) = 4 \Rightarrow c = 1$,

則 $\overline{PF} \perp x$ 軸時, $\overline{PF} = d(P, L) = 2c = 2$ (萬公里)。

6. 某行星繞太陽的軌道為如圖之橢圓, 太陽位於橢圓軌道之一焦點處。據觀測, 此行星與太陽的最近距離為 6 萬公里, 最遠距離為 8 萬公里, 則行星距太陽的距離恰為 7 萬公里時, 試問行星在下列哪一點上?



(1) A (2) B (3) C (4) D (5) E .

解： $\overline{AF} = 6$, $\overline{FG} = 8$, 得 $2a = 14$, $a = 7$,

設行星為 P , $\overline{PF} + \overline{PF'} = 14$, 當 $\overline{PF} = 7$ 時, 得 $\overline{PF'} = 7$;

因 $\overline{EF} = \overline{EF'} = 7$, 知 $P = E$, 故選(5)。