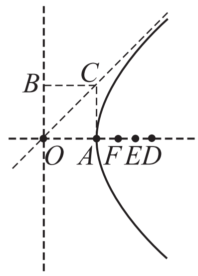
4-3　雙曲線

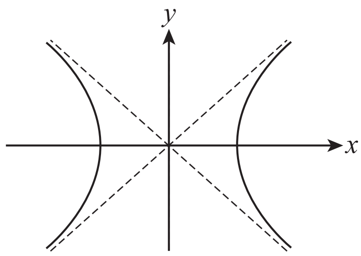
基礎題

1. 右圖是一雙曲線的部分圖形，已知 A， D， E， F 四個點中有一個是其焦點，試判別哪一點是雙曲線的焦點？
(1) A　(2) D　(3) E　(4) F ．



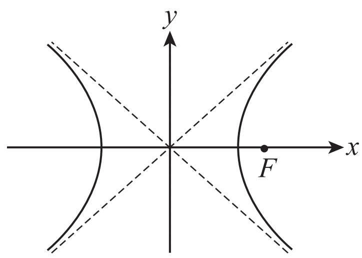
解：設焦點爲 P， 因滿足 $c^2 = a^2 + b^2$，
知 $\overline{OP} = c = \overline{OC}$， 善用尺規知焦點爲 F， 故選(4) ．

2. 在坐標平面上，試問下列哪一條直線與雙曲線 $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1$ 會相交？
(1) $3x - 4y = 0$　(2) $3x + 4y = 0$　(3) $x = 3$　(4) $y = 500$ ．



解：雙曲線是開口向左向右 ．
(1)(2)兩漸近線爲 $3x - 4y = 0$ 與 $3x + 4y = 0$ ．
(3)因頂點 $A(4, 0)$， 知 $x = 3$ 與雙曲線不相交 ．
(4)因雙曲線的圖形可以無限延伸，$y = 500$ 與雙曲線相交二點，故選(4) ．

3. 已知雙曲線 Γ ： $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1$ 的一焦點 $F(5, 0)$ ，若 P 爲 Γ 上的一動點，且滿足 $\overline{PF} = 5$，試問 P 點共有多少個？
(1) 1　(2) 2　(3) 3　(4) 4 ．



解：雙曲線是開口向左向右，因 $F(5, 0)$ 且滿足 $\overline{PF} = 5$，
知 P 點是以 $(5, 0)$ 爲圓心， 半徑爲 5 的圓，
得圓與雙曲線共有 2 個交點， 故選(2) ．

4. 雙曲線的兩焦點 $F_1(5,0)$， $F_2(-5,0)$ 且通過 $P(3,0)$， 試求：

(1)中心坐標．　(2)貫軸長．　(3)含共軛軸的直線．

解：(1) 中心是 $\overline{F_1F_2}$ 的中點 $(0,0)$ ．

(2) 因 $\overline{PF_2}=8$， $\overline{PF_1}=2$， 得貫軸長 $2a=\left|\overline{PF_1}-\overline{PF_2}\right|=6$ ．

(3) 含共軛軸的直線 $x=0$ ．

5. 貫軸與共軛軸等長的雙曲線稱為等軸雙曲線．已知等軸雙曲線的漸近線為 $x+y=0$， $x-y=0$ 且通過 $(3,1)$， 試求雙曲線的

(1)中心坐標．　(2)方程式．

解：(1) 兩漸近線的交點 $(0,0)$， 即為雙曲線的中心．

(2) 設雙曲線方程式為 $(x+y)(x-y)=k$，

$(3,1)$ 代入得 $k=8$， 所求方程式為 $\dfrac{x^2}{8}-\dfrac{y^2}{8}=1$ ．

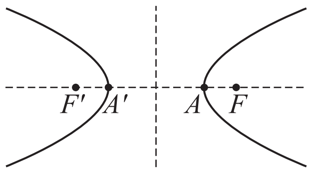
6. 試求 $x^2-9y^2+8x+36y-2=0$ 的共軛雙曲線．

解：方程式整理得 $(x+4)^2-9(y-2)^2=-18$，

故共軛雙曲線為 $(x+4)^2-9(y-2)^2=18$， 即 $x^2-9y^2+8x+36y-38=0$ ．

進階題

1. 已知雙曲線 $\dfrac{(x-2)^2}{9}-\dfrac{(y-1)^2}{16}=1$， 試求雙曲線：



(1)焦點．　(2)貫軸端點．　(3)漸近線．

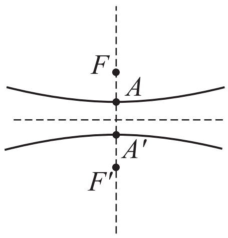
解：開口為左右， 中心 $(2,1)$， $a=3$， $b=4$， $c=5$，

(1) 焦點 $(-3,1)$， $(7,1)$ ．

(2) 貫軸端點 $(-1,1)$， $(5,1)$ ．

(3) 漸近線 $4(x-2)\pm3(y-1)=0$ ．

2. 已知雙曲線 $\dfrac{(y+2)^2}{1}-\dfrac{(x-1)^2}{9}=1$， 試求雙曲線：



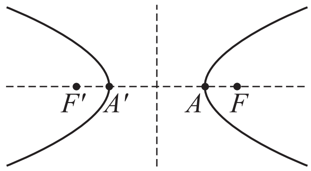
(1)共軛軸端點．　(2)漸近線．

解：開口為上下， 中心 $(1,-2)$， $a=1$， $b=3$， $c=\sqrt{10}$，

(1) 共軛軸端點 $(-2,-2)$， $(4,-2)$ ．

(2) 漸近線 $(x-1)\pm 3(y+2)=0$ ．

3. 試求滿足下列各條件的雙曲線方程式：



(1)兩頂點 $A'(-3,0)$， $A(3,0)$，一焦點 $F(5,0)$ ．

(2)中心 $(1,2)$，一頂點 $A(4,2)$，一焦點 $F(6,2)$ ．

解：(1) 開口爲左右，中心 $(0,0)$， $a=3$， $c=5$， $b=4$，方程式 $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$ ．

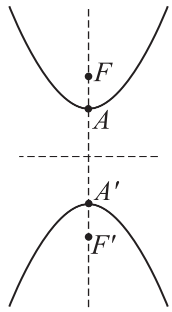
(2) 開口爲左右，中心 $(1,2)$， $a=3$， $c=5$， $b=4$，方程式

$\dfrac{(x-1)^2}{9}-\dfrac{(y-2)^2}{16}=1$ ．

4. 試求滿足下列各條件的雙曲線方程式：

(1)兩焦點 $F'(0,-5)$， $F(0,5)$，一頂點 $(0,4)$ ．

(2)兩頂點 $A'(-1,-7)$， $A(-1,17)$，一焦點 $F(-1,18)$ ．



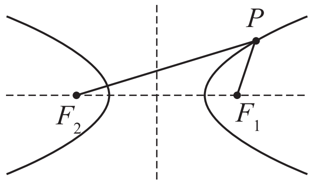
解：(1) 開口爲上下，中心 $(0,0)$， $c=5$， $a=4$， $b=3$，

方程式爲 $\dfrac{y^2}{16}-\dfrac{x^2}{9}=1$ ．

(2) 開口爲上下，中心 $(-1,5)$， $a=12$， $c=13$， $b=5$，

方程式爲 $\dfrac{(y-5)^2}{144}-\dfrac{(x+1)^2}{25}=1$ ．

5. 設 P 爲雙曲線 $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$ 上的一點且位在第一象限．若 F_1， F_2 爲此雙曲線的兩個焦點，且 $\overline{PF_1}:\overline{PF_2}=1:3$，則 $\triangle F_1PF_2$ 的周長等於__22__． 【92 學測】

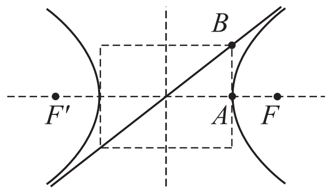


解：由雙曲線的定義： $\overline{PF_2}-\overline{PF_1}=2a$，

得 $2\overline{PF_1}=6$，知 $\overline{PF_1}=3$， $\overline{PF_2}=9$，由 $a=3$， $b=4$ 得 $c=5$，即 $\overline{F_1F_2}=10$，

$\triangle F_1PF_2$ 的周長 $=\overline{PF_1}+\overline{PF_2}+\overline{F_1F_2}=22$ ．

6. 雙曲線的二焦點 $F'(-5,0)$， $F(5,0)$ ．有一漸近線的斜率爲 $\dfrac{3}{4}$，試求雙曲線的方程式．



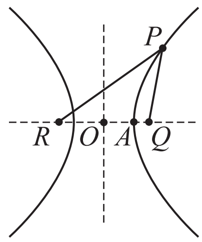
解：雙曲線的開口向左右，中心 $(0,0)$，得 $c=5$，

設雙曲線方程式爲 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$，又一漸近線的斜率 $m=\dfrac{3}{4}=\dfrac{b}{a}$，

得 $a:b:c=4:3:5$，又 $c=5$，得 $a=4$，$b=3$，方程式 $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$．

情境模擬題

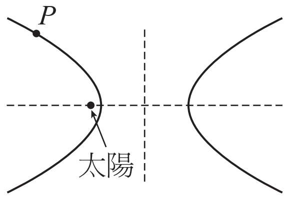
1. 兩個行星中心點距離爲 10 萬公里，今有彗星 P 的運動軌跡是以兩行星 Q，R 的中心點爲焦點的雙曲線一支（如右圖），已知 P 與 Q，R 的距離分別爲 8 萬公里，14 萬公里，則此彗星與行星的最近距離爲 __2__ 萬公里．



解：由 $\overline{QR}=10$，知 $c=5$，又 $\left|\overline{PR}-\overline{PQ}\right|=6$，知 $a=3$，$b=4$，

得方程式 $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$，由 $A(3,0)$，$Q(5,0)$，知最近距離 $\overline{AQ}=2$（萬公里）.

2. 有一幅雙曲線型的彗星軌道圖，如右圖，在圖中心左方 7 公分處爲軌道之頂點，9 公分處是太陽爲軌道之焦點．若彗星 P 的位置在通過中心的水平線上方 16 公分，試求其與太陽在圖上的距離爲 __20__ 公分．



解：設橢圓的方程式爲 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$，因頂點爲 $F\ (-7,0)$，得 $a^2=49$，

太陽在焦點 $(-9,0)$，知 $c^2=81$，$b^2=32$，得方程式爲 $\dfrac{x^2}{49}-\dfrac{y^2}{32}=1$，

以 $y=16$ 代入方程式得 $x=-21$，即彗星在 $(-21,16)$，

得距離爲 $\sqrt{(-21+9)^2+(16-0)^2}=20$（公分）.

3. 所謂一天文單位是表示地球與太陽的距離．已知兩個行星中心點的距離爲 10 個天文單位，今有一衛星同時受到兩行星的萬有引力影響，具備足夠的能量飛離兩行星，其運動軌跡爲沿著以兩個行星中心點爲焦點的雙曲線一支；在某一時刻，此衛星與其一行星距離 8 個天文單位，與另一行星距離 14 個天文單位，試求此衛星軌跡方程式爲 __$\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$__．

解：兩行星分別為 F， F'，知 $\overline{FF'}=10$，得 $2c=10$，

衛星 P 滿足 $\left|\overline{PF}-\overline{PF'}\right|=14-8=6$，知 $2a=6$，得 $b=4$，

得軌跡方程式為 $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$.