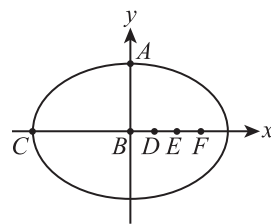


4-2 橢圓

基礎題

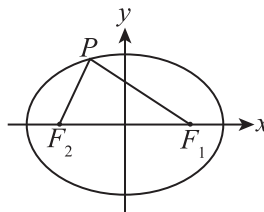
1. 右圖是一橢圓，已知 B, D, E, F 四個點中有一個點為其焦點，試判別哪一點是橢圓的焦點？（善用尺規）



- (1) B (2) D (3) E (4) F .

解：設焦點為 P ，因滿足 $a^2 = b^2 + c^2$ ，知 $\overline{AP} = a = \overline{BC}$ ，善用尺規知焦點為 F ，故選(4)。

2. 設橢圓 $x^2 + 4y^2 = 16$ 的兩焦點為 F_1 和 F_2 ，若點 P 在橢圓上且滿足 $\overline{PF_1} = 3\overline{PF_2}$ ，試問 $\overline{PF_1}$ 的長為



- (1) 2 (2) 4 (3) 6 (4) 8 .

解：橢圓的標準式為 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ ，知 $a = 4$ ，

得 $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a = 8$ ，且已知 $\overline{PF_1} = 3\overline{PF_2}$ ，得 $\overline{PF_1} = 6$ ，故選(3)。

3. 請問下列哪一個選項為橢圓 $\frac{x^2}{7^2} + \frac{y^2}{5^2} - \frac{2y}{5} = 0$ 的中心？

- (1) $(0, 0)$ (2) $(7, 0)$ (3) $(0, 1)$ (4) $(0, 5)$.

解：橢圓的標準式為 $\frac{x^2}{7^2} + \frac{(y-5)^2}{5^2} = 1$ ，知橢圓的中心為 $(0, 5)$ ，故選(4)。

4. 橢圓的兩焦點 $F_2(-3, 0)$ ， $F_1(3, 0)$ 且通過 $P(0, 4)$ ，試求：

- (1) 中心坐標 . (2) 長軸長 . (3) 含短軸的直線 .

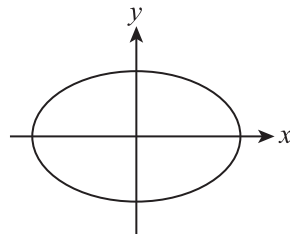
解：(1) 中心是 $\overline{F_1F_2}$ 的中點 $(0, 0)$.

(2) 因 $\overline{PF_2} = 5$ ， $\overline{PF_1} = 5$ ，得長軸長 $2a = \overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 10$.

(3) 含短軸的直線 $x = 0$.

5. 橢圓 $\frac{x^2}{4-t} + \frac{y^2}{t-2} = 1$ 的長軸在 x 軸上，則 t 的範圍為

$2 < t < 3$.



解： $a^2 = 4 - t > 0$ ，知 $t < 4$ 。

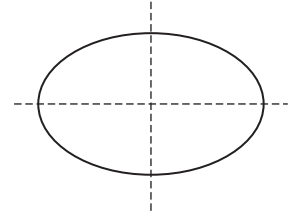
$b^2 = t - 2 > 0$ ，知 $t > 2$ 。

$a^2 > b^2$ ， $4 - t > t - 2$ ，知 $t < 3$ 。由以上得知 $2 < t < 3$ 。

6. 在坐標平面上，橢圓 $x^2 + 4y^2 + 8x - ky - 5 = 0$ 的圖形對稱於直線 $y = 2$ ，則 k 值為 16。

解：橢圓 $(x+4)^2 + 4(y-\frac{k}{8})^2 = 21 + \frac{k^2}{16}$ 的對稱中心 $(-4, \frac{k}{8})$

在直線 $y = 2$ 上， $\frac{k}{8} = 2$ ，得 $k = 16$ 。



進階題

1. 已知橢圓 $\frac{(x-1)^2}{25} + \frac{(y+2)^2}{16} = 1$ ，試求橢圓的

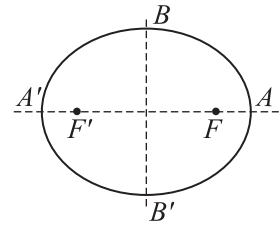
(1)中心。(2)焦點。(3)長軸端點。

解：長軸為水平， $a = 5$ ， $b = 4$ ， $c = 3$ 。

(1)中心 $(1, -2)$ 。

(2)焦點 $(-2, -2)$ ， $(4, -2)$ 。

(3)長軸端點 $(-4, -2)$ ， $(6, -2)$ 。



2. 已知橢圓 $\frac{(x-1)^2}{8} + \frac{(y+3)^2}{16} = 1$ ，試求橢圓的

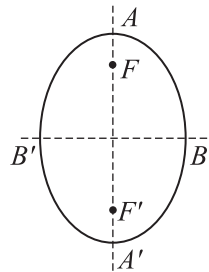
(1)中心。(2)焦點。(3)長軸長。

解：長軸為鉛直， $a = 4$ ， $b = 2\sqrt{2}$ ， $c = 2\sqrt{2}$ 。

(1)中心 $(1, -3)$ 。

(2)焦點 $(1, -3 - 2\sqrt{2})$ ， $(1, -3 + 2\sqrt{2})$ 。

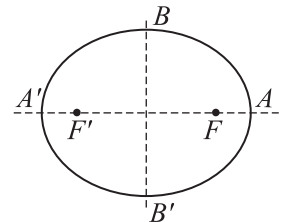
(3)長軸長 $2a = 8$ 。



3. 試求滿足下列各條件的橢圓方程式：

(1)兩焦點 $F(4, 0)$ ， $F'(-4, 0)$ ，長軸長為 10。

(2)兩焦點 $F(5, 3)$ ， $F'(-1, 3)$ ，短軸長為 8。



解：(1)長軸為水平，中心(0,0)， $2a=10$ ， $2c=8$ 。

由 $a=5$ ， $c=4$ ， $b=3$ 得方程式 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ 。

(2)長軸為水平，中心(2,3)， $2b=8$ ， $2c=6$ 。

由 $b=4$ ， $c=3$ ， $a=5$ 得方程式 $\frac{(x-2)^2}{25}+\frac{(y-3)^2}{16}=1$ 。

4. 試求滿足下列各條件的橢圓方程式：

(1)短軸端點 $B(4,0)$ ， $B'(-4,0)$ ，長軸長為10。

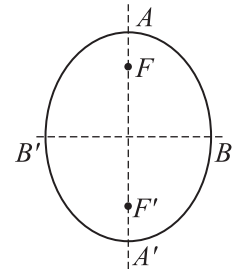
(2)兩焦點 $F(1,5)$ ， $F'(1,-1)$ ，短軸長為8。

解：(1)長軸為鉛直，中心(0,0)， $2a=10$ ， $2b=8$ 。

由 $a=5$ ， $b=4$ ， $c=3$ 得方程式 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$ 。

(2)長軸為鉛直，中心(1,2)， $2b=8$ ， $2c=6$ 。

由 $b=4$ ， $c=3$ ， $a=5$ 得方程式 $\frac{(x-1)^2}{16}+\frac{(y-2)^2}{25}=1$ 。

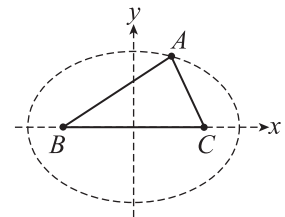


5. 坐標平面上，已知 $\triangle ABC$ 中， $B(-3,0)$ ， $C(3,0)$ 且周長為16。

若頂點A均在圖形 Γ 上，求 Γ 的方程式。

解： $\overline{BC}=6$ ，得 $\overline{AB}+\overline{AC}=10$ ，A所在圖形 Γ 中 $F'(-3,0)$ ，

$F(3,0)$ 且 $2a=10$ 的橢圓方程式為 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ 。



6. 橢圓 $9x^2+25y^2=225$ 的兩焦點為 F_1 ， F_2 ，已知 P 為橢圓上的一動點，使

$\triangle PF_1F_2$ 為等腰三角形，試問 P 點共有 6 個。

解： $\overline{PF_1}=\overline{PF_2}$ 時， P 在 $\overline{F_1F_2}$ 的中垂線上，有2個點。

$\overline{PF_1}=\overline{F_1F_2}$ ， $\overline{PF_2}=\overline{F_1F_2}$ 時的 P 點分別落在以 F_1 ， F_2 為圓心，

半徑為 $\overline{F_1F_2}=8$ 的圓上，兩圓與橢圓各有2個交點。得 $2+2+2=6$ (個)。

情境模擬題

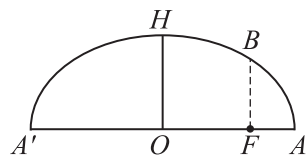
1. 第一個繞行地球的人造衛星是蘇聯於西元 1957 年所發射的史潑尼克一號 (Sputnik I)，其繞行軌道是橢圓，以地心為一焦點，這衛星離地面的最大高度是 800 公里，而離地面的最小高度是 200 公里，又地球的半徑是 6400 公里，試問這橢圓軌道的長軸長為 13800 公里。(取整數)

解：設地心為 F ，長軸兩端點為 A' 與 A ，

$$\overline{A'F} = 800 + 6400 = 7200, \quad \overline{AF} = 200 + 6400 = 6600,$$

知橢圓軌道的長軸長為 $\overline{A'A} = \overline{A'F} + \overline{AF} = 13800$ (公里)。

2. 有一座側看為半橢圓形的大橋，已知全長 $\overline{AA'} = 50$ 公尺，設橋中心點 O ，鋼架的最高點 H 時， $\overline{OH} = 15$ 公尺，則距離 A 點 5 公尺的 F 點處，鋼架的高度為 9 公尺。



解：坐標平面上設 $O(0, 0)$ ， $A(25, 0)$ ， $H(0, 15)$ ，

$$\text{得橢圓方程式為 } \frac{x^2}{625} + \frac{y^2}{225} = 1,$$

因 $\overline{OF} = \overline{OA} - \overline{AF} = 20$ ，設 $B(20, b)$ ，代入橢圓方程式

$$\frac{400}{625} + \frac{b^2}{225} = 1, \text{ 得 } b = 9, \text{ 知 } F \text{ 處鋼架的高度為 } 9 \text{ 公尺。}$$

3. 有一個音樂廳是由橢圓繞長軸旋轉半圈而成的半橢圓球體。此橢圓的長軸長為 100 公尺，短軸長為 60 公尺，若演奏者位於其中一個焦點上，已知另一個焦點所在的座位可以聽到最清晰的聲音，則這個座位離演奏者的距離為 80 公尺。(10 分)

解：橢圓的長軸長 $2a = 100$ ，短軸長 $2b = 60$ ，

$$a = 50, \quad b = 30, \text{ 而 } a^2 = b^2 + c^2, \text{ 得 } c = 40, \text{ 知距離為 } 2c = 80 \text{ (公尺)。}$$