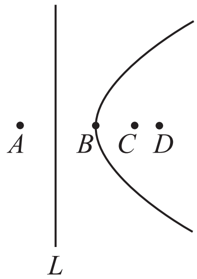
4-1　拋物線

基礎題

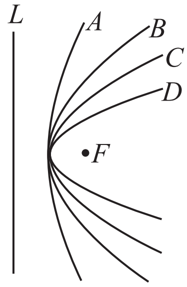
1. 右圖是一拋物線的部分圖形，已知準線 L 且 A，B，C，D 四個點中有一個爲其焦點，試判別哪一點是其焦點？



(1) A　(2) B　(3) C　(4) D．

解：四個點都在拋物線的對稱軸上，B 是頂點，
因拋物線的焦距是頂點 B 到準線的距離，
而 $d(B,L)=\overline{BC}$，知焦點爲 C，故選(3)．

2. 右圖是一拋物線的焦點 F 及準線 L，且圖形 A，B，C，D 中有一個爲其圖形，試判別哪一圖形是其圖形？



(1) A　(2) B　(3) C　(4) D．

解：拋物線 Γ 上的任意點 P，滿足 $\overline{PF}=d(P,L)$，
善用簡易工具可知圖形爲 B，故選(2)．

3. 已知拋物線 Γ：$y^2=4x$，圓 C：$(x-1)^2+y^2=1$，
試問 Γ 與 C 兩圖形有幾個交點？
(1) 0　(2) 1　(3) 3　(4) 4．

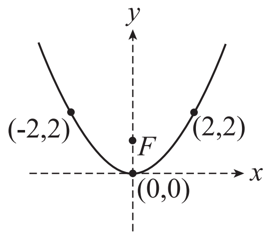
解：拋物線 Γ 的焦點 $F(1,0)$ 是圓 C 的圓心，
圓 C 上的任一點 P，滿足 $\overline{PF}=1$，
而拋物線上任一點 P 滿足 $\overline{PF}=1$ 的點只有頂點，
知兩圖形恰有一交點 $(0,0)$，故選(2)．

4. 拋物線的焦點 $F(1,0)$，準線 $x=-1$，試求拋物線的
(1)對稱軸方程式．　(2)頂點坐標．　(3)拋物線方程式．

解：(1)通過焦點且垂直準線 L 的直線 L_0：$y=0$．
(2) L 與 L_0 的交點 $B(-1,0)$，$\overline{BF}$ 的中點爲頂點 $(0,0)$．
(3) $\sqrt{(x-1)^2+(y-0)^2}=|x+1|$，得 $y^2=4x$．

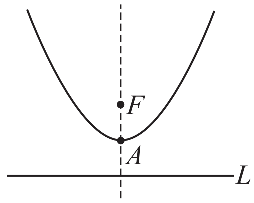
5. 抛物線的焦點 $F(0,-2)$，準線 $y=2$，試求抛物線的
(1)對稱軸方程式．　(2)頂點坐標．　(3)抛物線方程式．
解：(1)通過焦點且垂直準線 L 的直線 L_0 ： $x=0$ ．
(2) L 與 L_0 的交點 $B(0,2)$， $\overline{BF}$ 的中點爲頂點 $(0,0)$ ．
(3) $\sqrt{(x-0)^2+(y+2)^2}=|y-2|$，得 $x^2=-8y$ ．

6. 坐標平面上，以原點 $(0,0)$ 爲頂點且通過 $(2,2)$， $(-2,2)$ 的抛物線，求此抛物線的焦點坐標．

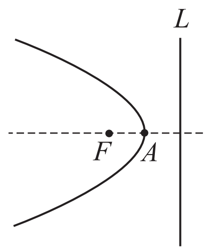


解：開口向上，頂點 $A(0,0)$，
設抛物線方程式 $y=ax^2$，將 $(2,2)$ 代入，得 $2=4a$， $a=\frac{1}{2}$，
抛物線標準式 $x^2=2y$，得焦點坐標爲 $(0,\frac{1}{2})$ ．

進階題

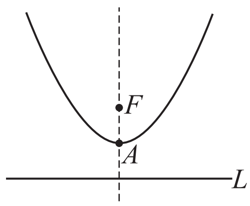


1. 已知抛物線 $(x+4)^2=16(y+1)$，試求抛物線的
(1)頂點．　(2)焦點．　(3)準線．
解： $(x+4)^2=16(y+1)$，知 $c=4$ 開口向上，
(1)頂點 $A(-4,-1)$ ．　(2)焦點 $F(-4,3)$ ．　(3)準線 $y=-5$ ．



2. 已知抛物線 $(y+1)^2=-12(x-2)$，試求抛物線的
(1)頂點．　(2)焦點．　(3)準線．
解： $(y+1)^2=-12(x-2)$，知 $c=-3$ 開口向左，
(1)頂點 $A(2,-1)$ ．　(2)焦點 $F(-1,-1)$ ．
(3)準線 $x=5$ ．

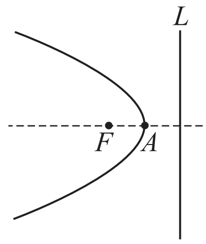
3. 已知抛物線 $y=\frac{1}{16}x^2+\frac{1}{2}x+2$，試求抛物線的
(1)頂點．　(2)焦點．　(3)準線．



解：先化爲整係數方程式 $16y=x^2+8x+32$，
再改寫成標準式 $(x+4)^2=16(y-1)$，得 $c=4$，
(1)頂點 $A(-4,1)$ ．　(2)焦點 $F(-4,5)$ ．　(3)準線 $y=-3$ ．

4. 已知拋物線方程式 $y^2+2y+12x-23=0$，試求拋物線的

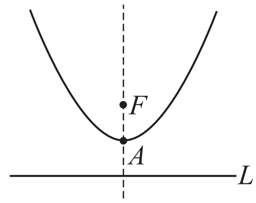
(1)頂點． (2)焦點． (3)準線．



解：寫爲標準式 $(y+1)^2=-12(x-2)$， $c=-3$，

(1)頂點 $A(2,-1)$． (2)焦點 $F(-1,-1)$． (3)準線 $x=5$．

5. 試求滿足下列各條件的拋物線方程式．



(1)頂點 $A(1,-2)$，焦點 $F(1,0)$．

(2)焦點 $F(5,2)$，準線 $y=-4$．

解：(1)開口向上，頂點 $A(1,-2)$， $4c=8$， 得 $(x-1)^2=8(y+2)$．

(2)開口向上，頂點 $A(5,-1)$， $4c=12$， 得 $(x-5)^2=12(y+1)$．

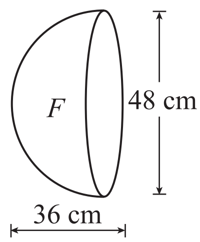
6. 已知一拋物線的對稱軸平行 y 軸，且通過 $A(0,3)$， $B(1,1)$， $C(2,3)$，試求此拋物線的焦點．

解：對稱軸平行 y 軸，知開口向上或向下，

設拋物線方程式 $y=ax^2+bx+c$， 三點代入 $\begin{cases} 3=c \\ 1=a+b+c \\ 3=4a+2b+c \end{cases}$，

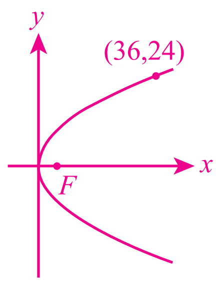
得 $a=2$， $b=-4$， $c=3$，方程式爲 $y=2x^2-4x+3$，

整理得 $(x-1)^2=\dfrac{1}{2}(y-1)$，知焦點爲 $(1,\dfrac{9}{8})$．



情境模擬題

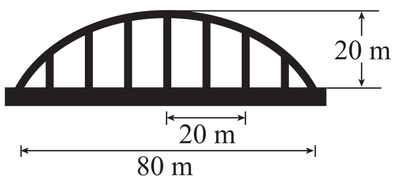
1. 探照燈的外殼是拋物線的一部分繞它的對稱軸旋轉一周而成，已知燈口直徑是 48 公分，燈的深度是 36 公分，則焦距（焦點與頂點的距離）爲 __4__ 公分．



解：設拋物線 Γ ： $y^2=4cx$， 因通過點 $P(36,24)$，

由 $24^2=4c\times36$， 得 $c=4$，知焦距爲 4 公分．

2. 已知某座橋上鋼拱的造型是拋物線，若橋長爲 80 公尺長，中央最高爲 20 公尺，每側各有 7 根鋼柱支撐，試問距離鋼拱中央 20 公尺處的鋼柱高度爲 __15__ 公尺．



解：設拋物線爲 $y=ax^2+b$，

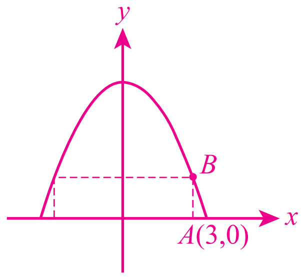
因最高點為 $(0, 20)$，代入得 $b = 20$；

鋼拱左右端點分別為 $(-40, 0)$ 與 $(40, 0)$，代入得 $a = -\dfrac{1}{80}$．

拋物線為 $y = -\dfrac{1}{80}x^2 + 20$，所求鋼柱高 $H = -\dfrac{1}{80}(20)^2 + 20 = 15$（公尺）.

3. 在只有皮尺沒有梯子的情況下，想要測出一拋物線形拱門的高度．已知此拋物線以過最高點的鉛垂線為對稱軸．現甲、乙兩人以皮尺測得拱門底部寬為 6 公尺，且距底部 $\dfrac{3}{2}$ 公尺高處其寬為 5 公尺．利用這些數據可推算出拱門的高度為 $\underline{\dfrac{54}{11}}$ 公尺．(化為最簡分數)　【92 學測】

解： 圖形坐標化得 $A(3, 0)$，$B(\dfrac{5}{2}, \dfrac{3}{2})$，



設拋物線方程式 $y = ax^2 + b$，兩點代入

$\begin{cases} 0 = 9a + b \\ \dfrac{3}{2} = \dfrac{25}{4}a + b \end{cases}$，得 $a = -\dfrac{6}{11}$，$b = \dfrac{54}{11}$，

$y = -\dfrac{6}{11}x^2 + \dfrac{54}{11}$，知拱門的高度為 $\dfrac{54}{11}$（公尺）.