2-1　平面方程式

基礎題

1. 下列有關法向量的敘述何者不正確？
   (1)任一平面的法向量恰有一個　(2) $(0,0,1)$ 是 xy 平面的一個法向量
   (3) $(1,0,0)$ 是 yz 平面的一個法向量　(4) $(0,1,0)$ 是 zx 平面的一個法向量．
   解：(1)任一平面的法向量有無限多個．選項為(1)．

2. 試求下列各平面的方程式：
   (1)通過 $P(2,1,3)$，法向量為 $(3,-2,4)$ 的平面 E．
   (2)通過 $P(2,1,3)$ 且垂直 z 軸的平面 F．
   解：(1) E ： $3(x-2)-2(y-1)+4(z-3)=0$，即 E ： $3x-2y+4z=16$．
   (2) z 軸上取 $(0,0,0)$，$(0,0,1)$，得一法向量 $\overrightarrow{n}=(0,0,1)$，又 $P(2,1,3)$，
   知平面 $F: z=3$．

3. 試求通過 $A(2,1,-1)$，$B(1,2,-1)$，$C(1,1,3)$ 三點的平面方程式．
   解：平面上有二個向量：$\overrightarrow{AB}=(-1,1,0)$，$\overrightarrow{AC}=(-1,0,4)$，
   得一法向量 $\overrightarrow{n}=(4,4,1)$，又通過 $A(2,1,-1)$，
   故平面方程式 $4x+4y+z=11$．

4. 試求下列各題中兩平面的夾角：
   (1) E_1 ： $2x+y-z=7$，E_2 ： $x-y-2z=5$．
   (2) F_1 ： $2x+y+3z=7$，F_2 ： $x+y-z=5$．
   解：設 θ 為一夾角，
   (1) $\overrightarrow{n_1}=(2,1,-1)$，$\overrightarrow{n_2}=(1,-1,-2)$，$\cos\theta=\dfrac{2-1+2}{\sqrt{6}\sqrt{6}}=\dfrac{1}{2}$，得夾角為 $60°$ 與 $120°$．
   (2) $\overrightarrow{n_1}=(2,1,3)$，$\overrightarrow{n_2}=(1,1,-1)$，$\cos\theta=\dfrac{2+1-3}{\sqrt{14}\sqrt{3}}=0$，得夾角為 $90°$．

5. 試求點 P 到平面 E 的距離：
   (1) $P(1,2,3)$，E ： $2x+2y+z=0$．　(2) $P(1,3,3)$，E ： $3x+6y+2z+8=0$．

解：(1) $d=\dfrac{|2+4+3|}{3}=3$ ．(2) $d=\dfrac{|3+18+6+8|}{7}=5$ ．

6. 若 E_1 ：$2x+2y-z+8=0$， E_2 ：$2x+2y-z-4=0$ ．

(1)試求 E_1 與 E_2 的距離．

(2)若平面 E 和兩平面平行且到兩平面距離相等，求平面 E ．

解：(1) $d=\dfrac{|8-(-4)|}{3}=4$ ．

(2)設 E ：$2x+2y-z+k=0$， $\dfrac{|8-k|}{3}=\dfrac{|k-(-4)|}{3}$， 得 $k=2$，

故所求 E ：$2x+2y-z+2=0$ ．

進階題

1. 試求下列各平面的方程式：

(1)通過 $P(2,1,3)$， 且平行 $3x-2y+4z=5$ 的平面．

(2)通過 $P(2,1,3)$， 且平行 xy 平面的平面．

解：(1)平面 $3x-2y+4z=5$ 的法向量 $\overrightarrow{n}=(3,-2,4)$， 知所求平面過 $P(2,1,3)$，

且一法向量 $\overrightarrow{n}=(3,-2,4)$， 得平面：$3x-2y+4z=16$ ．

(2) z 軸為 xy 平面的一條法線，知 xy 平面的法向量 $\overrightarrow{n}=(0,0,1)$，

故所求平面通過 $P(2,1,3)$， 一法向量 $\overrightarrow{n}=(0,0,1)$， 得 $z=3$ ．

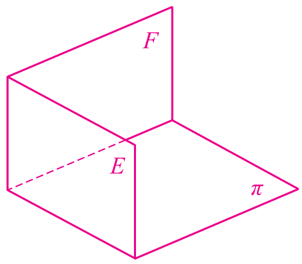
2. 已知平面 E ：$2x+y=3$ 與平面 F ：$x+y+z=5$，試求通過點 $A(1,4,1)$ 且與 E，F 均垂直之平面 π 的方程式．

解：平面 E， F 的法向量 $\overrightarrow{n_1}=(2,1,0)$， $\overrightarrow{n_2}=(1,1,1)$，

得平面 π 的一法向量 $\overrightarrow{n}=(1,-2,1)$，

又平面 π 通過點 $A(1,4,1)$，

知平面 π ：$x-2y+z+6=0$ ．



3. 設 E ： $2x+y-z=1$，

(1)若 E_1 ： $x+ky+3z=5$ 與 E 互相垂直，試求 k 值．

(2)若 E_2 ： $ax+by-2z=7$ 與 E 互相平行，試求 a， b 的值．

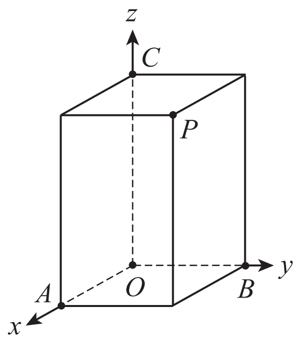
解：平面 E 的法向量 $\overrightarrow{n}=(2,1,-1)$，

(1) E_1 的法向量 $\overrightarrow{n_1}=(1,k,3)$， $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{n_1}=0$，即 $2+k-3=0$，得 $k=1$．

(2) E_2 的法向量 $\overrightarrow{n_2}=(a,b,-2)$， $\overrightarrow{n}\,//\,\overrightarrow{n_2}$，即 $\frac{a}{2}=\frac{b}{1}=\frac{-2}{-1}$，得 $a=4$， $b=2$．

4. 右圖爲空間坐標系上的一個長方體，$P(2,2,4)$，試求：

(1)平面 ABC 的方程式． (2)點 P 到平面 ABC 的距離．



解：(1) $A(2,0,0)$， $B(0,2,0)$， $C(0,0,4)$，

由 $\overrightarrow{AB}=(-2,2,0)$， $\overrightarrow{AC}=(-2,0,4)$，

得平面 ABC 的法向量 $(8,8,4)$，

取 $\overrightarrow{n}=(2,2,1)$， 又通過 $A(2,0,0)$，

得平面方程式 $2x+2y+z=4$．

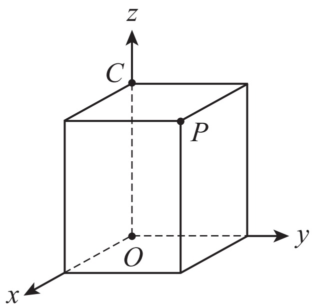
(2)由距離公式

$$d=\frac{|4+4+4-4|}{3}=\frac{8}{3}\ .$$

5. 右圖爲空間坐標系上的一個長方體，$P(3,4,5)$，試求：

(1)通過 C 且垂直 $\overline{OP}$ 的平面 E 的方程式．

(2)平面 E 與 xy 平面的夾角．



解：(1) $\overrightarrow{OP}=(3,4,5)$ 是平面 E 的法向量，

又 $C(0,0,5)$，得 E ： $3x+4y+5z=25$．

(2) E 的法向量 $\overrightarrow{n_1}=(3,4,5)$，

xy 平面法向量 $\overrightarrow{n_2}=(0,0,1)$，

$\cos\theta=\frac{5}{5\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$， $\theta=45^\circ$ 及另一夾角爲 135°．

6. 由 $P(3,-2,4)$ 與 Q， R 所決定平面 π 的法向量爲 $\overrightarrow{n}=(3,-2,4)$.

(1)試求平面 π 的方程式．

(2)若 Q 在 xy 平面的正射影爲 $Q'(9,3,0)$，試求 Q 點坐標．

解：(1)通過 $P(3,-2,4)$，且法向量 $\overrightarrow{n}=(3,-2,4)$，

得 π ： $3(x-3)-2(y+2)+4(z-4)=0$， π ： $3x-2y+4z=29$.

(2)設 $Q(9,3,k)$，因 Q 在 π 上，知 $27-6+4k=29$， $k=2$， 故 $Q(9,3,2)$．

情境模擬題

1. 空間中有一個△ ABC，其中 $A(0,0,5)$， $B(1,2,8)$， $C(-2,4,6)$，有一點光源在 $P(0,0,10)$ 的地方照向△ ABC，試求△ ABC 在 xy 平面上的影子△ DEF 的面積．

解： A， B， C 的影子分別爲 $D(0,0,0)$， $E(5,10,0)$， $F(-5,10,0)$，知△ DEF 即 xy 坐標平面上 $(0,0)$，$(5,10)$，$(-5,10)$，所圍三角形面積 $\frac{1}{2}\times10\times10=50$.

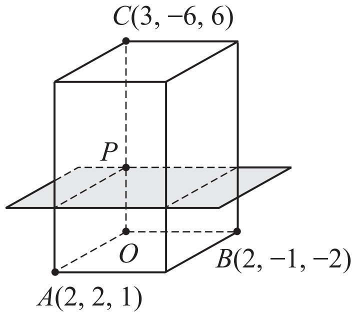
2. 如右圖，想將一塊正立方體的積木 $ABCD-EFGH$ 分成兩塊，每一塊各有正立方體的 4 個頂點，則其截面的形狀可能爲何種圖形？

(1)四邊形　(2)五邊形　(3)六邊形　(4)八邊形．

解：分爲 $ABCD$ 與 $EFGH$，則截面爲四邊形．

分爲 $AEFH$ 與 $BCDG$，則截面爲六邊形．故選(1)(3)．

3. 設 $O(0,0,0)$ 爲坐標空間中某長方體的一個頂點，且知 $(2,2,1)$， $(2,-1,-2)$， $(3,-6,6)$ 爲此長方體中與 O 相鄰的三頂點．若平面 E ： $x+by+cz=d$ 將此長方體截成兩部分，其中包含頂點 O 的那一部分是個正立方體，試求 (b,c,d)．（10 分）　　【97 學測】



解：因 $\overline{OA}=3$， $\overline{OB}=3$， $\overline{OC}=9$，

得平面 E 通過點 $P(1,-2,2)$，

由 $\overrightarrow{OA}=(2,2,1)$， $\overrightarrow{OB}=(2,-1,-2)$，取 $\overrightarrow{n}=(1,-2,2)$ 爲平面 E 的一法向量，

得 E ： $x-2y+2z=9$， 故 $(b,c,d)=(-2,2,9)$.