1-4　空間向量的外積

基礎題

1. 設 $\overrightarrow{a}=(2,2,1)$，$\overrightarrow{b}=(1,-2,2)$，試問 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 的外積 $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$ 為
   (1) $(2,-1,-2)$　(2) $(-2,1,2)$　(3) $(6,-3,-6)$　(4) $(-6,3,3)$．

   解：$\overrightarrow{a}=(2,2,1)$，$\overrightarrow{b}=(1,-2,2)$，

   $$\begin{array}{cccccc} 2 & 2 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & 1 & -2 & 2 \end{array}$$

   得 $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}=(6,-3,-6)$，選項為(3)．

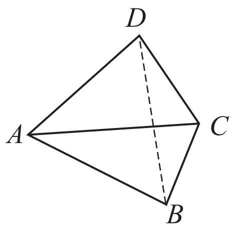
2. 設 $A(1,1,2)$，$B(2,3,4)$，$C(3,3,2)$，試問△ABC 的面積為
   (1) 3　(2) 4　(3) 5　(4) 6．

   解：$\overrightarrow{AB}=(1,2,2)$，$\overrightarrow{AC}=(2,2,0)$

   $$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \end{array}$$

   $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(-4,4,-2)$，△$ABC$ 的面積為 $\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\frac{1}{2}\times 6=3$，選項(1)．

3. 右圖是正四面體，且 $A(3,0,0)$，$B(0,3,0)$，$C(0,0,3)$，$D(3,3,3)$，試問四面體 $ABCD$ 的體積為
   (1) 6　(2) 9　(3) 12　(4) 18．



   解：$\overrightarrow{AB}=(-3,3,0)$，$\overrightarrow{AC}=(-3,0,3)$，$\overrightarrow{AD}=(0,3,3)$，

   $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(9,9,9)$，$(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AD}=54$，

   四面體體積為 $\frac{1}{6}|(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AD}|=\frac{1}{6}\times 54=9$，選項為(2)．

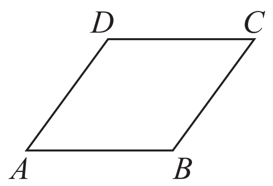
4. 若 $\overrightarrow{a}=(2,-1,-2)$，$\overrightarrow{b}=(2,2,1)$，若向量 n 滿足 $\overrightarrow{n}\perp\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{n}\perp\overrightarrow{b}$，且 $|\overrightarrow{n}|=6$，試求 $\overrightarrow{n}$（兩解）.

解：$\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}=(3,-6,6)$，且 $|\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}|=9$，

因 $|\overrightarrow{n}|=6$，得 $\overrightarrow{n}=\frac{2}{3}(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})=(2,-4,4)$，

或 $\overrightarrow{n}=-\frac{2}{3}(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})=(-2,4,-4)$．

5. 設空間中有一平行四邊形的三頂點 $A(1,0,1)$，$B(3,0,3)$，$C(3,2,2)$，試求平行四邊形 $ABCD$ 的面積．



解：平行四邊形 $ABCD$ 的面積是△ ABC 面積 2 倍，

即 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ 所展開平行四邊形的面積．

$\overrightarrow{AB}=(2,0,2)$，$\overrightarrow{AC}=(2,2,1)$，$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(-4,2,4)$，

知面積爲 $|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=6$．

6. 空間中四點 $A(1,2,3)$，$B(4,-1,4)$，$C(4,2,5)$，$D(k,2,k)$，所決定的四面體體積爲 3，試問 k 值（兩解）.

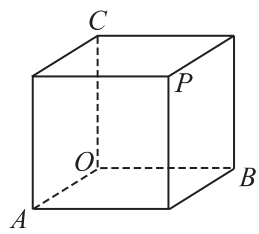
解：$\overrightarrow{AB}=(3,-3,1)$，$\overrightarrow{AC}=(3,0,2)$，$\overrightarrow{AD}=(k-1,0,k-3)$，

$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(-6,-3,9)$，$(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AD}=3k-21$，

知 $\frac{1}{6}|3k-21|=3$，$|k-7|=6$，知 $k=1$ 或 $k=13$．

進階題

1. 右圖是邊長爲 6 的正立方體，已知 $O(0,0,0)$，$P(6,6,6)$，試求△ ABC 的面積．

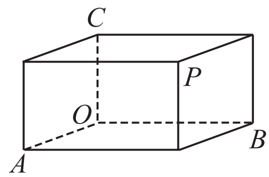


解：$A(6,0,0)$，$B(0,6,0)$，$C(0,0,6)$，

$\overrightarrow{AB}=(-6,6,0)$，$\overrightarrow{AC}=(-6,0,6)$，

$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(36,36,36)$，△ ABC 的面積 $\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=18\sqrt{3}$．

2. 右圖是一長方體，長，寬，高分別爲 6，3，2，已知 $O(0,0,0)$， $P(3,6,2)$，試求$\triangle ABC$的面積．

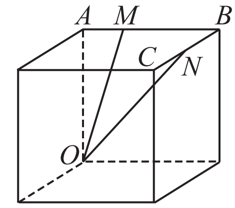


解：$A(3,0,0)$， $B(0,6,0)$， $C(0,0,2)$，

$\overrightarrow{AB}=(-3,6,0)$， $\overrightarrow{AC}=(-3,0,2)$，

$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(12,6,18)$，$\triangle ABC$的面積$\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=3\sqrt{14}$．

3. 右圖爲一正立方體， $\overline{BM}=2\overline{AM}$， $\overline{BN}=\overline{CN}$，設$O(0,0,0)$， $C(6,6,6)$，試求$\triangle OMN$的面積．



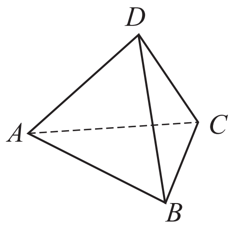
解：$O(0,0,0)$， $M(0,2,6)$， $N(3,6,6)$，

$\overrightarrow{OM}=(0,2,6)$， $\overrightarrow{ON}=(3,6,6)$，

$\overrightarrow{OM}\times\overrightarrow{ON}=(-24,18,-6)$，

知$\triangle OMN$的面積爲$\frac{1}{2}|\overrightarrow{OM}\times\overrightarrow{ON}|=3\sqrt{26}$．

4. 右圖是邊長爲$3\sqrt{2}$的正四面體，已知$A(0,0,0)$， $B(3,3,0)$， $C(3,0,3)$， $D(0,3,3)$，若四個面的重心分別是P， Q， R， S，試問四面體$PQRS$的體積．



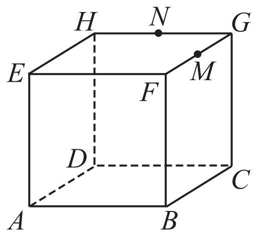
解：設$\triangle ABC$，$\triangle ABD$，$\triangle BCD$，$\triangle ACD$的重心依序爲P，Q， R， S，得$P(2,1,1)$， $Q(1,2,1)$， $R(2,2,2)$， $S(1,1,2)$，

$\overrightarrow{PQ}=(-1,1,0)$， $\overrightarrow{PR}=(0,1,1)$， $\overrightarrow{PS}=(-1,0,1)$，

$\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}=(1,1,-1)$， $(\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR})\cdot\overrightarrow{PS}=-2$，

知體積$V=\frac{1}{6}|(\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR})\cdot\overrightarrow{PS}|=\frac{1}{3}$．

5. 右圖是邊長爲 2 的正立方體，$\overline{GF}$，$\overline{GH}$的中點分別爲M，N，試問四面體$A-EMN$的體積．



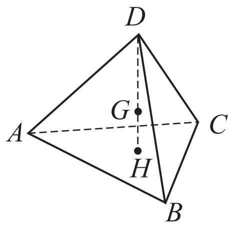
解：設$D(0,0,0)$， $A(2,0,0)$， $E(2,0,2)$， $M(1,2,2)$，$N(0,1,2)$，

$\overrightarrow{AE}=(0,0,2)$， $\overrightarrow{AM}=(-1,2,2)$， $\overrightarrow{AN}=(-2,1,2)$，

$\overrightarrow{AE}\times\overrightarrow{AM}=(-4,-2,0)$， $(\overrightarrow{AE}\times\overrightarrow{AH})\cdot\overrightarrow{AN}=6$，

得 $V=\dfrac{1}{6}|(\overrightarrow{AE}\times\overrightarrow{AH})\cdot\overrightarrow{AN}|=1$ ．

6. 右圖是邊長爲 $6\sqrt{2}$ 的正四面體，設 $A(6,6,0)$， $B(6,0,6)$， $C(0,6,6)$， $D(0,0,0)$， H 是△ ABC 的重心，若正四面體的重心爲 G， G 在 $\overline{DH}$ 上，且 $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\overrightarrow{0}$， 試問 $\overline{DG}=k\overline{GH}$ 時的 k 值．

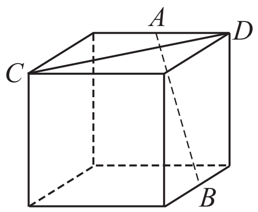


解： $H(4,4,4)$， $G(3,3,3)$， $D(0,0,0)$，

$\overrightarrow{DG}=(3,3,3)$， $\overrightarrow{GH}=(1,1,1)$， $\overline{DG}=3\overline{GH}$， 知 $k=3$ ．

情境模擬題

1. 有一個正立方體的透視圖，圖中的 A， B 是稜邊的中點， C， D 是頂點，已知稜長爲 2，試問四面體 $ABCD$ 的體積．



解： 將正立方體坐標化，

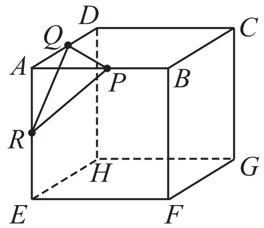
設 $A(0,1,2)$， $B(1,2,0)$， $C(2,0,2)$， $D(0,2,2)$，

$\overrightarrow{AB}=(1,1,-2)$， $\overrightarrow{AC}=(2,-1,0)$， $\overrightarrow{AD}=(0,1,0)$，

$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(-2,-4,-3)$， $(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AD}=-4$，

知 $V=\dfrac{1}{6}|(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AD}|=\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3}$ ．

2. 有一個藝術家想對右圖中邊長爲 10 公尺的正立方體木塊做出一個藝術品，藝術家拿鋸子沿 P， Q， R 三點鋸下四面體 $A-PQR$，以截面 PQR 置於地面上，已知 $\overline{AP}=8$， $\overline{AQ}=\overline{AR}=4$， 試問：



(1)△ PQR 的面積．

(2)四面體 $A-PQR$ 的體積．

(3)方便運送此藝術品到展覽館，請幫這位藝術家算一下這一個藝術品的高．

解：$\angle PQR=\angle PAR=\angle QAR=90°$，$\overline{AP}=8$，$\overline{AQ}=\overline{AR}=4$，

設 $P(8,0,0)$，$Q(0,4,0)$，$R(0,0,4)$，

(1)$\triangle PQR$ 的面積爲 $\frac{1}{2}|\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}|=24$．

(2)此藝術品的體積爲 $\frac{1}{6}\times 8\times 4\times 4=\frac{64}{3}$．

(3)$V=\frac{1}{3}(\triangle PQR\text{ 面積})\times H$，$\frac{64}{3}=\frac{1}{3}\times 24\times H$，得 $H=\frac{8}{3}$（公尺）.