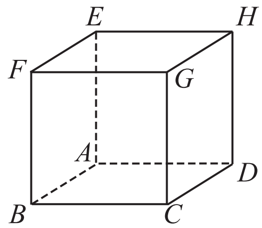
1-3　空間向量的內積

基礎題



1. 正立方體 $ABCD-EFGH$ 且邊長爲 1，試問下列哪一選項的值爲最小？

   (1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$　(2) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$　(3) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AG}$　(4) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}$.

   解：設 $A(0,0,0)$， $G(1,1,1)$，

   (1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=(1,0,0)\cdot(1,1,0)=1$. (2) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=(1,0,0)\cdot(0,1,0)=0$.

   (3) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AG}=(1,0,0)\cdot(1,1,1)=1$. (4) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}=(1,0,0)\cdot(-1,1,0)=-1$.

   選項爲(4) .

2. 向量 $(2,-2,1)$ 與下列哪一個向量的夾角爲最小？

   (1) $(-2,-2,-1)$　(2) $(2,-2,-1)$　(3) $(2,2,1)$　(4) $(-2,2,-1)$.

   解：設 $\overrightarrow{a}=(2,-2,1)$ 與選項 k 的夾角爲 θ_k .

   (1) $\overrightarrow{b_1}=(-2,-2,-1)$，得 $\cos\theta_1=-\dfrac{1}{9}$. (2) $\overrightarrow{b_2}=(2,-2,-1)$，得 $\cos\theta_2=\dfrac{7}{9}$.

   (3) $\overrightarrow{b_3}=(2,2,1)$，得 $\cos\theta_3=\dfrac{1}{9}$. (4) $\overrightarrow{b_4}=(-2,2,-1)$，得 $\cos\theta_4=-1$.

   得 $\theta_3<\theta_2<\theta_1<\theta_4$，選項爲(3) .

3. 設 $A(3,2,-1)$， $B(2,1,-1)$， $C(3,1,0)$，則 $\angle BAC$ 爲

   (1) $30°$　(2) $60°$　(3) $90°$　(4) $120°$.

   解： $\overrightarrow{AB}=(-1,-1,0)$， $\overrightarrow{AC}=(0,-1,1)$， $\cos A=\dfrac{0+1+0}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2}$，得 $\angle BAC=60°$，

   選項爲(2) .

4. 設 $\overrightarrow{a}=(1,2,k-3)$， $\overrightarrow{b}=(2,4,-k)$，若 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 垂直，試問 k 值（兩解）.

   解： $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=0$，即 $2+8+(k-3)(-k)=0$，

   $k^2-3k-10=0$，得 $k=-2$ 或 $k=5$.

5. 設 $P(2,1,2)$， $Q(3,-1,4)$， $R(6,-4,4)$，試問 $\overrightarrow{PR}$ 在 $\overrightarrow{PQ}$ 上的正射影 .

解：$\overrightarrow{PR}=(4,-5,2)$，$\overrightarrow{PQ}=(1,-2,2)$，

得正射影為$\dfrac{4+10+4}{9}(1,-2,2)=(2,-4,4)$．

6. 設x，y，z為實數且$x^2+y^2+z^2=9$，試問$2x+2y+z$的最大值．

解：由柯西不等式$(x^2+y^2+z^2)(2^2+2^2+1^2)\ge(2x+2y+z)^2$，

$-9\le 2x+2y+z\le 9$，知$2x+2y+z$的最大值為 9．

進階題

1. 設$\overrightarrow{a}=(2,-1,3)$，$\overrightarrow{b}=(2,0,1)$，若$\overrightarrow{c}=\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}$且$\overrightarrow{c}$與$\overrightarrow{a}$垂直，試問$t$值．

解：$\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{a}=0$，$(\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b})\cdot\overrightarrow{a}=0$，$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{a}=0$，$14+7t=0$，知$t=-2$．

2. 設$\overrightarrow{a}=(k,-1,1)$，$\overrightarrow{b}=(1,1,k)$，若$\overrightarrow{a}$與$\overrightarrow{b}$的夾角為$60°$，試問$k$值．

解：$\cos 60°=\dfrac{2k-1}{\sqrt{k^2+2}\sqrt{k^2+2}}=\dfrac{2k-1}{k^2+2}$，$\dfrac{1}{2}=\dfrac{2k-1}{k^2+2}$，得$k^2-4k+4=0$，知$k=2$．

3. 設x，y，z為實數，且$6x+3y+2z=49$，試問$x^2+y^2+z^2$有最小值時，x，y，z的值．

解：由柯西不等式

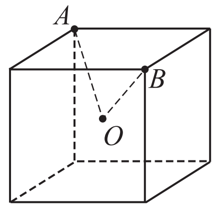
$(x^2+y^2+z^2)(6^2+3^2+2^2)\ge(6x+3y+2z)^2$，

得$x^2+y^2+z^2\ge 49$，知$x^2+y^2+z^2$的最小值為 49．

此時$x=6t$，$y=3t$，$z=2t$，代回$6x+3y+2z=49$，

得$t=1$，知此時$x=6$，$y=3$，$z=2$．

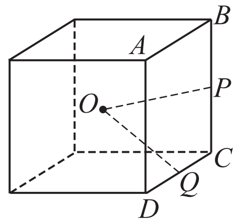
4. 右圖是邊長為 2 的正立方體，中心為$O(0,0,0)$，$A(-1,-1,1)$，$B(1,1,1)$，試求$\cos\angle AOB$的值．



解：$\overrightarrow{OA}=(-1,-1,1)$，$\overrightarrow{OB}=(1,1,1)$，

$\cos\angle AOB=\dfrac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|}=-\dfrac{1}{3}$．

5. 如右圖，$ABCD$ 爲正立方體的一個面，P，Q 分別爲 $\overline{BC}$，$\overline{CD}$ 的中點，O 爲正立方體的中心，則 $\cos\angle POQ=$ $\underline{\quad\frac{1}{2}\quad}$.



解：設正立方體的邊長爲 2，

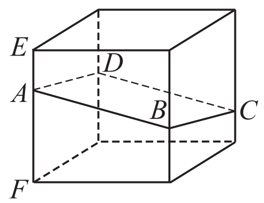
$B(0,2,2)$，$C(0,2,0)$，$D(2,2,0)$，

則 $P(0,2,1)$，$Q(1,2,0)$，$O(1,1,1)$，

$\overrightarrow{OP}=(-1,1,0)$，$\overrightarrow{OQ}=(0,1,-1)$，

$$\cos\angle POQ=\frac{\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}}{|\overrightarrow{OP}||\overrightarrow{OQ}|}=\frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{1}{2}\ .$$

6. 右圖爲一正立方體，被一平面截出一個四邊形 $ABCD$，其中 B，D 分別爲稜的中點，且 $\overline{EA}:\overline{AF}=1:2$，則 $\cos\angle DAB=$ $\underline{\quad\frac{1}{37}\quad}$.（化成最簡分數）



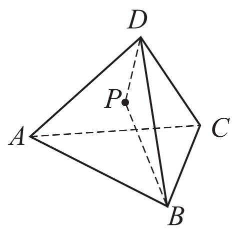
解：建立空間坐標系，設邊長爲 6，則 $A(6,0,4)$，$B(6,6,3)$，$D(0,0,3)$，

故 $\overrightarrow{AD}=(-6,0,-1)$，$\overrightarrow{AB}=(0,6,-1)$，

$$\therefore\ \cos\angle DAB=\frac{\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AD}||\overrightarrow{AB}|}=\frac{0+0+1}{\sqrt{37}\cdot\sqrt{37}}=\frac{1}{37}\ .$$

情境模擬題

1. 學校有一棟正四面體的溫室，小明建置一個空間坐標系，其坐標爲 $A(0,0,0)$，$B(3,3,0)$，$C(3,0,3)$，$D(0,3,3)$，溫室中有二鋼架 $\overline{DP}$ 及 $\overline{PB}$，其中 P 是 $\triangle ACD$ 的重心，試問 $\angle BPD$ 爲 $\underline{\quad 90^\circ\quad}$.



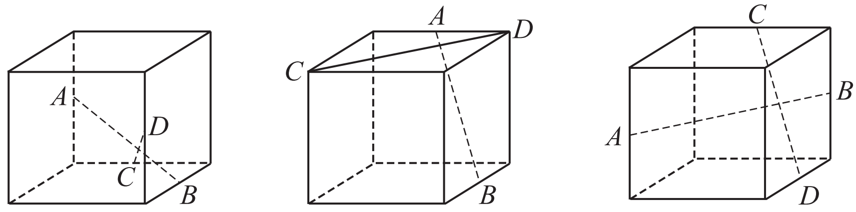
解：$P(1,1,2)$ 且 $D(0,3,3)$，$B(3,3,0)$，

由向量的夾角公式，在 $\triangle BPD$ 中，

$\overrightarrow{PD}=(-1,2,1)$，$\overrightarrow{PB}=(2,2,-2)$，

$$\cos\angle BPD=\frac{-2+4-2}{\sqrt{6}\sqrt{12}}=0\text{，知 }\angle BPD=90^\circ\ .$$

2. 某次空間概念的測試，老師提供三個立體的透視圖，圖中的 A， B， C， D 是稜邊的中點，請判別圖中 $\overrightarrow{AB}$ 與 $\overrightarrow{CD}$ 互相垂直的共有__ 2 __個．



(甲)　　　　(乙)　　　　(丙)

解：將正立方體坐標化，設邊長為 2 且透視圖的一頂點為 $(0, 0, 0)$，

甲： $\overrightarrow{AB}=(1, 2, -1)$， $\overrightarrow{CD}=(2, 1, 1)$， $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=3$ ．

乙： $\overrightarrow{AB}=(1, 1, -2)$， $\overrightarrow{CD}=(-2, 2, 0)$， $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=0$ ．

丙： $\overrightarrow{AB}=(-2, 2, 0)$， $\overrightarrow{CD}=(1, 1, -2)$， $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=0$ ．

知圖乙，圖丙中 $\overrightarrow{AB}$ 與 $\overrightarrow{CD}$ 互相垂直，共有 2 個．

3. 墾丁音樂季的廣場上有照明燈 A， B，現小明建置一個空間坐標系得 $A(1, 3, 5)$， $B(9, 7, 5)$，在廣場地面上，即 xy 平面上，想找動點 $P(x, y, 0)$，使得 $\overline{PA}\perp\overline{PB}$，試問 P 點的個數為

(1) 0　(2) 1　(3) 2　(4) 無限多．

解： $\overrightarrow{PA}=(1-x, 3-y, 5)$， $\overrightarrow{PB}=(9-x, 7-y, 5)$，

因 $\overline{PA}\perp\overline{PB}$，知 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=0$，

即 $(1-x)(9-x)+(3-y)(7-y)+25=0$，

$(x-5)^2+(y-5)^2=5$，

點 P 是以 $\overline{AB}$ 為直徑的圓上的任一點，但滿足 $(x-5)^2+(y-5)^2=-5$ 的實數 x， y 不存在，故選項為(1)．