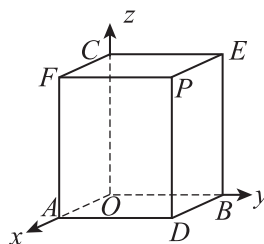


1-2 空間坐標系中的向量運算

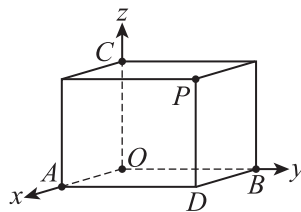
基礎題

1. 右圖是空間坐標系上的一個長方體，若 $A(3, 0, 0)$ ， $B(0, 4, 0)$ ， $C(0, 0, 5)$ ，試問點 P 的坐標為
 (1) $(3, 4, 0)$ (2) $(0, 4, 5)$ (3) $(3, 0, 5)$ (4) $(3, 4, 5)$.



解：由空間坐標系 $P(3, 4, 5)$ ，選項為(4)。

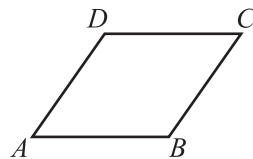
2. 右圖是空間坐標系上的一個長方體，若 $P(5, 15, 8)$ ，試問點 P 到 x 軸的距離 \overline{PA} 為
 (1) 8 (2) 10 (3) 15 (4) 17 .



解： $P(5, 15, 8)$ ， $A(5, 0, 0)$ ，

由兩點的距離公式得 $\overline{PA} = 17$ ，選項為(4)。

3. 設空間中一平行四邊形 $ABCD$ ， $A(-3, 2, 3)$ ， $B(5, -4, 2)$ ， $C(4, 1, -1)$ ，試問 D 點的坐標為
 (1) $(-2, -3, 6)$ (2) $(-4, 7, 0)$ (3) $(12, -5, -2)$ (4)
 $(4, -7, 0)$.

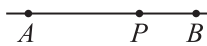


解：設 D 點坐標 (x, y, z) ， $\overrightarrow{BC} = (-1, 5, -3)$ ， $\overrightarrow{AD} = (x+3, y-2, z-3)$ ，

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ ， $x = -4$ ， $y = 7$ ， $z = 0$ ，故 D 點的坐標為 $(-4, 7, 0)$ ，選項為(2)。

4. 設 $\vec{a} = (3, 0, 1)$ ， $\vec{b} = (2, 3, 1)$ ， $\vec{c} = (3, -1, 3)$ ，試求 $3\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$.

解： $3\vec{a} + \vec{b} - \vec{c} = (9, 0, 3) + (2, 3, 1) - (3, -1, 3) = (8, 4, 1)$.

5. 設 $A(5, 2, 4)$ ， $B(2, -1, 7)$ ， P 是 \overline{AB} 上一點，且 $\overline{AP} : \overline{PB} = 2 : 1$ ， 試求 P 的坐標 .

解：因 $A-P-B$ 且 $\overline{AP}:\overline{PB}=2:1$ ，設 $P(x, y, z)$ ，由分點公式得

$$x = \frac{2 \times 2 + 1 \times 5}{2+1} = 3, \quad y = \frac{2 \times (-1) + 1 \times 2}{2+1} = 0, \quad z = \frac{2 \times 7 + 1 \times 4}{2+1} = 6,$$

知 $P(3, 0, 6)$ 。

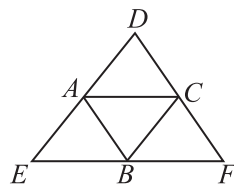
6. 設 $A(5, 0, 1)$ ， $B(-4, 3, 0)$ 。若 $\triangle ABC$ 的重心 $G(1, 2, 1)$ ，試求 C 的坐標。

解：設 $C(x, y, z)$ ，由重心性質可知

$$\frac{5-4+x}{3} = 1, \quad \frac{0+3+y}{3} = 2, \quad \frac{1+0+z}{3} = 1, \quad \text{得 } C(2, 3, 2)。$$

進階題

1. 在空間中 $A(1, 2, 3)$ ， $B(2, 5, 3)$ ， $C(2, 6, 4)$ ，已知有 D ， E ， F 三點分別與 A ， B ， C 構成一平行四邊形，試求 D ， E ， F 的坐標。



解： $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ ，得 $D(1, 3, 4)$ 。

$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CB}$ ，得 $E(1, 1, 2)$ 。

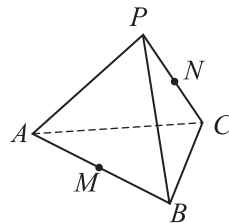
$\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AC}$ ，得 $F(3, 9, 4)$ 。

2. 右圖是邊長為 $\sqrt{2}$ 的正四面體， $P(0, 0, 0)$ ， $A(1, 1, 0)$ ， $B(1, 0, 1)$ ， $C(0, 1, 1)$ ，試求：

(1) \overline{AB} 中點 M 及 \overline{PC} 中點 N 的坐標。

(2) 兩歪斜線 \overleftrightarrow{AB} 與 \overleftrightarrow{CP} 的距離 \overline{MN} 。

解：(1) $M(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ， $N(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 。(2) $\overline{MN} = 1$ 。

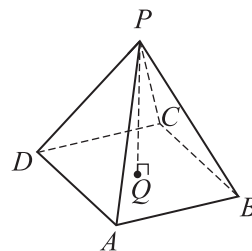


3. 右圖是邊長為 $\sqrt{2}$ 的正四角錐， $P(0, 0, 1)$ ， $A(1, 0, 0)$ ， $B(0, 1, 0)$ ， $C(-1, 0, 0)$ ， $D(0, -1, 0)$ ，試求：

(1) \overline{AC} 中點 Q 的坐標。

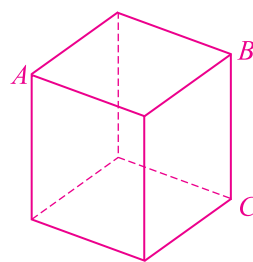
(2) 正四角錐的高 \overline{PQ} 。

解：(1) $Q(0, 0, 0)$ 。(2) $\overline{PQ} = 1$ 。



4. 空間中一正立方體，其中三頂點坐標為 $A(1,1,1)$ ， $B(-1,3,-1)$ ， $C(0,2,-3)$ ，試問此正立方體的體積為 $6\sqrt{6}$ 。

解： $\overline{AB} = \sqrt{12}$ ， $\overline{AC} = \sqrt{18}$ ， $\overline{BC} = \sqrt{6}$ ，
 知 $\overline{AB}:\overline{AC}:\overline{BC} = \sqrt{2}:\sqrt{3}:1$ ，
 知 \overline{BC} 為邊長，得體積為 $(\sqrt{6})^3 = 6\sqrt{6}$ 。



5. 令 $A(-1,6,0)$ ， $B(3,-1,-2)$ ， $C(4,4,5)$ 為坐標空間中三點。若 D 為空間中的一點且滿足 $3\overrightarrow{DA} - 4\overrightarrow{DB} + 2\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{0}$ ，試求點 D 的坐標。

解： $3\overrightarrow{DA} - 4\overrightarrow{DB} + 2\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{0} \Rightarrow 3(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OD}) - 4(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OD}) + 2(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD}) = \overrightarrow{0}$
 $\Rightarrow \overrightarrow{OD} = 3\overrightarrow{OA} - 4\overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC}$
 $= 3(-1, 6, 0) - 4(3, -1, -2) + 2(4, 4, 5) = (-7, 30, 18)$ ，知 $D(-7, 30, 18)$ 。

6. 設 $\vec{a} = (2, -1, -6)$ ， $\vec{b} = (1, 0, 2)$ ， t 為實數，試求：

(1) $\vec{a} + t\vec{b}$ 的坐標表示法。

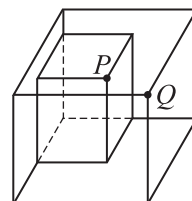
(2) $|\vec{a} + t\vec{b}|$ 的最小值。

解： (1) $\vec{a} + t\vec{b} = (2, -1, -6) + t(1, 0, 2) = (2+t, -1, -6+2t)$ ，
 得 $\vec{a} + t\vec{b} = (2+t, -1, -6+2t)$ 。

(2) $|\vec{a} + t\vec{b}| = \sqrt{(2+t)^2 + (-1)^2 + (-6+2t)^2} = \sqrt{5(t-2)^2 + 21} \geq \sqrt{21}$ 。

情境模擬題

1. 一個長方體盒子，其長，寬，高分別為 5 公分，8 公分，12 公分，放在一邊長為 14 公分之正立方體角落上，使其三相鄰之面緊貼在正立方體，則圖中 P ， Q 兩頂點之距離為 11 公分。(8 分)



解：建置空間坐標系，取 $P(5, 8, 12)$ ， $Q(14, 14, 14)$ ，

得 $\overline{PQ} = \sqrt{(14-5)^2 + (14-8)^2 + (14-12)^2} = 11$ 。

2. 在空間坐標中，設 xy 平面為一鏡面，有一光線通過點 $P(1, 2, 1)$ ，射向鏡面上的點 $O(0, 0, 0)$ ，經鏡面反射後通過點 R ，若 $\overline{OR} = 2\overline{PO}$ ，試求 R 點的坐標。

解： P 對 xy 平面的對稱點 $P'(1, 2, -1)$ ，

$$\overrightarrow{OR} = 2\overrightarrow{P'O} = 2(-1, -2, 1) = (-2, -4, 2)，知 R(-2, -4, 2)。$$

3. 有一塊邊長為 10 公分的正立方體積木，積木上有兩條對角線 \overline{AB} 與 \overline{CD} ，試求這兩條線的距離。(10 分)

解：設 $A(0, 0, 0)$ ， $B(10, 0, 10)$ ， $C(10, 10, 0)$ ， $D(0, 10, 10)$ ，

\overline{AB} 的中點 $M(5, 0, 5)$ ， \overline{CD} 的中點 $N(5, 10, 5)$ ，

得 $\overline{MN} = 10$ 公分。

