1-1　空間概念

1. 在空間中，試問哪一選項的條件，恰決定一平面？

   (1)相異的三個點

   (2)一直線及一點

   (3)不相交的二直線

   (4)同時垂直於平面 E 的兩相異直線．

   解：(1)三點共線時，無法決定一平面．(2)點在直線上時，無法決定一平面．
   (3)歪斜時，無法決定一平面．(4)兩直線必平行．
   選項為(4)．

2. 在空間中有平面 E 及 E 外一點 P，試問哪一選項正確？

   (1)通過點 P 的直線中，恰有一直線與 E 平行

   (2)通過點 P 的直線中，恰有一直線與 E 垂直

   (3)通過點 P 的平面中，恰有一平面與 E 垂直

   (4)通過點 P 的平面中，恰有一平面與 E 相交成一直線．

   解：(1)無限多條．(3)無限多個．(4)無限多個．
   選項為(2)．

3. 在空間中有直線 L 及 L 外一點 Q，試問哪一選項正確？

   (1)通過 Q 的平面中，恰有一平面與 L 平行

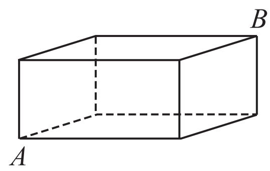
   (2)通過 Q 的平面中，恰有一平面與 L 垂直

   (3)通過 Q 的直線中，恰有一直線與 L 歪斜

   (4)通過 Q 的直線中，恰有一直線與 L 相交於一點．

   解：(1)無限多個．(3)無限多條．(4)無限多條．選項為(2)．

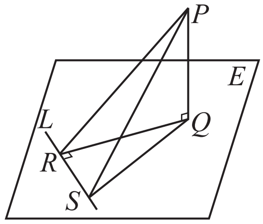
4. 有一長方體的長，寬，高分別為 6，3，2，試求任意兩頂點間最長的距離．



   解：最長的距離為 $\overline{AB}$，

   $\overline{AB}=\sqrt{6^2+3^2+2^2}=7$．

5. 已知$\overline{PQ}$垂直平面E於Q點，L在E上，$\overline{QR}$垂直L於R點，若S在L上，$\overline{QS}=17$，$\overline{RS}=8$，$\overline{PQ}=20$，試求$\overline{PR}$，$\overline{PS}$之值．



解：$\because$ $\overline{PQ}\perp\overline{QR}$，$\overline{QR}\perp\overline{RS}$，由三垂線定理可知$\overline{PR}\perp\overline{RS}$，

由直角△QRS中，$\overline{QS}=17$，$\overline{RS}=8$，得$\overline{QR}=15$．

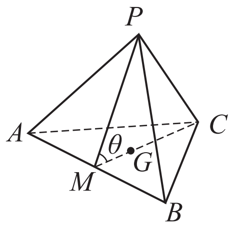
由直角△PQR中，$\overline{PQ}=20$，$\overline{QR}=15$，得$\overline{PR}=25$．

由直角△PRS中，$\overline{RS}=8$，$\overline{PR}=25$，得$\overline{PS}=\sqrt{689}$．

6. 右圖為一正四面體，任兩面角的銳角為θ，

(1)若G是△ABC的重心，$\overline{PG}\perp\overline{MC}$是否正確？

(2)試求$\cos\theta$的值．



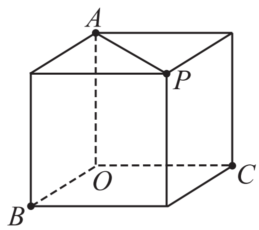
解：(1)是；$\overline{PA}=\overline{PB}=\overline{PC}$且$\overline{GA}=\overline{GB}=\overline{GC}$，故$\overline{PG}\perp\overline{MC}$．

(2) $\overline{MG}=\frac{1}{3}\overline{MC}=\frac{1}{3}\overline{PM}$，

$\cos\theta=\frac{\overline{MG}}{\overline{PM}}=\frac{1}{3}$．

進階題

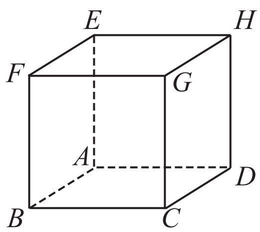
1. 一正立方體中有四頂點P，A，B，C，各頂點間的距離為2，試求此正立方體的體積．



解：設稜長為x，則$\overline{AP}^2=x^2+x^2$，得$2x^2=4$，$x=\sqrt{2}$，

所求體積為$x^3=2\sqrt{2}$．

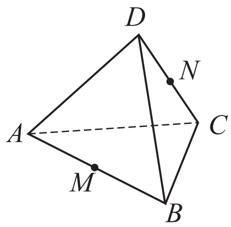
2. 右圖的正立方體中，在12個稜邊中和$\overline{AB}$成歪斜的共有多少個？



解：與稜$\overline{AB}$成歪斜的稜為

$\overline{CG}$，$\overline{DH}$，$\overline{EH}$，$\overline{FG}$，共有4個．

3. 右圖為一正四面體，稜長為 6，試問兩歪斜線 $\overleftrightarrow{AB}$ 與 $\overleftrightarrow{CD}$ 的距離 $\overline{MN}$ ．



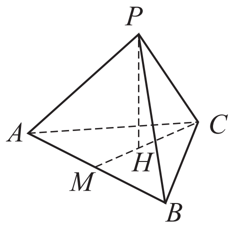
解：取 $\overline{AB}$ 中點 M， $\overline{CD}$ 中點 N，

連 $\overline{DM}$， $\overline{MC}$， $\overline{MN}$，

$\overline{DM}=\overline{MC}=3\sqrt{3}$， $\overline{DN}=3$，

知所求距離 $\overline{MN}=\sqrt{(3\sqrt{3})^2-3^2}=3\sqrt{2}$ ．

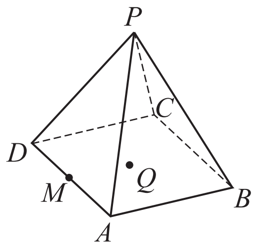
4. 右圖是邊長為 6 的正四面體 $P-ABC$，試問此正四面體的高．



解： $\overline{PM}=\overline{MC}=3\sqrt{3}$， H 是 $\triangle ABC$ 的重心，

$\overline{MH}=\frac{1}{3}\overline{MC}=\sqrt{3}$， $\overline{PH}^2=\sqrt{\overline{PM}^2-\overline{MH}^2}=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$ ．

5. 右圖是邊長為 2 的正四角錐，$\overline{AM}=\overline{MD}$，$Q$ 是 $\overline{BD}$ 的中點，若底面 $ABCD$ 與側面 PAD 兩面角的銳角為 θ，試求：



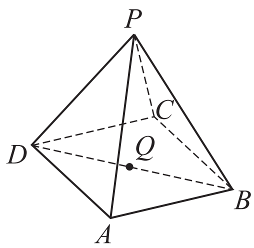
(1) $\overline{PM}$， $\overline{MQ}$ 的值．

(2) $\cos\theta$ 的值．

解：(1) $\overline{PM}=\sqrt{3}$， $\overline{MQ}=1$ ．

(2) $\cos\theta=\frac{\overline{MQ}}{\overline{PM}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$ ．

6. 右圖是邊長為 2 的正四角錐， $\overline{BD}$ 的中點 Q，



(1)判別直線 PQ 是否垂直平面 $ABCD$ ．

(2)試求正四角錐的高 $\overline{PQ}$ ．

解：(1)是；$\triangle PBD$ 中， $\overline{PQ}\perp\overline{BD}$，

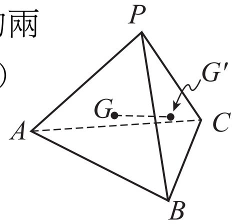
$\triangle PAC$ 中， $\overline{PQ}\perp\overline{AC}$，

知 $\overline{PQ}$ 垂直平面 $ABCD$ ．

(2) $\overline{PB}=2$， $\overline{BQ}=\sqrt{2}$， 得 $\overline{PQ}=\sqrt{2}$ ．

情境模擬題

1. 學校有一棟正四面體的溫室，且邊長爲 6 公尺，有一鋼柱的兩端分別爲其中兩面的重心 G，G'，試求此鋼柱的長．(8 分)

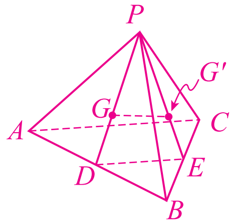


解：作 $\overline{PG}$ 連線，

$\overline{PG'}$ 連線交 $\overline{AB}$，$\overline{BC}$ 於 D，E，

$\overline{GG'}=\dfrac{2}{3}\overline{DE}=\dfrac{2}{3}(\dfrac{1}{2}\overline{AC})=\dfrac{1}{3}\overline{AC}=2$，

知鋼柱長爲 2 公尺．



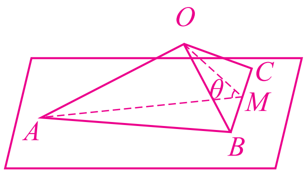
2. 小明設計一個特殊用途的三腳架，已知三隻腳的長分別爲 60 公分，30 公分，30 公分且兩兩互相垂直，若將此腳架放在水平的地面上時，已知△ABC 與△OBC 所夾銳角爲 θ，試問 $\tan\theta$ 的值．(10 分)

解：如右圖，$\overline{OA}=60$，$\overline{OB}=\overline{OC}=30$，

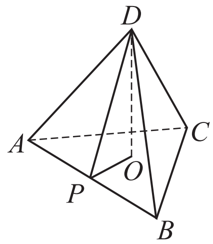
在△OBC 中，若 M 是 $\overline{BC}$ 的中點，得 $\overline{OM}=15\sqrt{2}$，

在△AOM 中，因 $\overline{OA}\perp\overline{OB}$，$\overline{OA}\perp\overline{OC}$，

知 $\overline{OA}\perp\overline{OM}$，得 $\tan\theta=\dfrac{\overline{OA}}{\overline{OM}}=2\sqrt{2}$．



3. 有一件藝術品的外觀爲四面體 $ABCD$，計算得△ABC 的面積爲 15，△ABD 的面積爲 12，$\overline{AB}=3$，且△ABC 與△ABD 的二面角爲 $30°$，若 D 在△ABC 的投影點爲 O，試問 $\overline{DO}$ 的長．(10 分)



解：作 $\overline{OP}$ 垂直 $\overline{AB}$ 於 P，

由三垂線定理知 $\overline{DP}\perp\overline{AB}$，

且 $\angle OPD$ 是二面角，即 $\angle OPD=30°$，

△$ABD=\dfrac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{DP}$，$12=\dfrac{1}{2}\times3\times\overline{DP}$，得 $\overline{DP}=8$，知 $\overline{DO}=\overline{DP}\cdot\sin30°=4$．