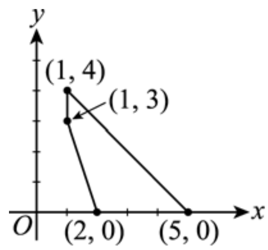
第二章 直線與圓

◆總複習◆

一、單選題

1. 如右圖所示，坐標平面上，以 $(1, 4)$, $(1, 3)$, $(2, 0)$ 及 $(5, 0)$ 爲頂點的四邊形區域（含邊界），可用下列哪一組不等式表示？

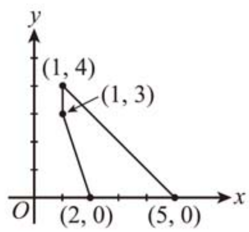


(1) $x \le 1,\ 3x+y \le 6,\ y \ge 0,\ x+y \ge 5$
(2) $x \ge 1,\ 3x+y \le 6,\ y \ge 0,\ x+y \ge 5$
(3) $x \ge 1,\ 3x+y \le 6,\ y \ge 0,\ x+y \le 5$
(4) $x \ge 1,\ 3x+y \ge 6,\ y \ge 0,\ x+y \ge 5$
(5) $x \ge 1,\ 3x+y \ge 6,\ y \ge 0,\ x+y \le 5$.

$\boxed{\text{解答}}$：(5) .

$\boxed{\text{解析}}$：設 $A(1,\ 4)$， $B(1,\ 3)$， $C(2,\ 0)$， $D(5,\ 0)$ 四邊形 $ABCD$ 區域（含邊界）如下：

$$\begin{cases} \overleftrightarrow{AB}：x=1\text{的右邊} \\ \overleftrightarrow{BC}：3x+y=6\text{的右邊} \\ \overleftrightarrow{CD}：y=0\text{的上方} \\ \overleftrightarrow{DA}：x+y=5\text{的左邊} \end{cases}，\text{即不等式組爲}\begin{cases} x \ge 1 \\ 3x+y \ge 6 \\ y \ge 0 \\ x+y \le 5 \end{cases}，$$



2. 設 k 爲實數，若方程式 $x^2+y^2-1+kx=0$ 的圖形恆爲一圓，則下列哪一個選項是正確的？
(1) k 值不能爲 -1　(2)此圓的圓心在 y 軸上　(3)此圓的最小半徑爲 2
(4)不論 k 爲任何實數，$(0,1)$ 與 $(0,-1)$ 必爲圓上的兩點　(5)當圓與直線 $x=4$ 相切時，則 $k=-4$.

$\boxed{\text{解答}}$：(4) .

$\boxed{\text{解析}}$：圓 C ： $x^2+y^2+kx-1=0 \Leftrightarrow (x+\dfrac{k}{2})^2+y^2=\dfrac{k^2}{4}+1=(\dfrac{\sqrt{4+k^2}}{2})^2$ ，

故圓心 $K(-\dfrac{k}{2},\ 0)$ ，且半徑 $r=\dfrac{\sqrt{4+k^2}}{2}>0$ ，對任意實數 k 恆成立，

又此圓的圓心 K 在 x 軸（ $y=0$ ）上，當 $k=0$ 時，此圓的半徑 $r=1$ 爲最小，

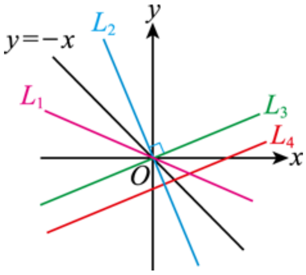
當 $x=0$ 代入圓 C ，得 $y^2-1=0 \Rightarrow y=1$ 或 -1 ，

即不論 k 值，$(0,\ 1)$ 與 $(0,\ -1)$ 必爲圓 C 上的點，又 $\begin{cases} C：x^2+y^2+kx-1=0\cdots\cdots① \\ L：x=4\cdots\cdots② \end{cases}$ ，

由②代入①，$16+y^2-1+4k=0 \Rightarrow y^2+4k+15=0$ ，

∵相切，其判別式$0^2-4(4k+15)=0$，求得$k=\dfrac{-15}{4}$．

二、多選題



1. 坐標平面上有四條直線L_1，L_2，L_3，L_4與 x 軸，y 軸及直線$y=-x$，其相關位置如圖所示．其中L_2與L_3垂直，而L_3與L_4平行．設L_1，L_2，L_3的斜率分別是m_1，m_2，m_3且L_4的方程式為$y=m_4x+c$，試問下列哪些 選項是正確的？

   (1) $m_3>m_2>m_1$ (2) $m_2\cdot m_4=-1$ (3) $m_1<-1$ (4) $m_1\cdot m_4<-1$ (5) $c<0$ ．

$\boxed{\text{解答}}$：(2)(5)．

$\boxed{\text{解析}}$： (1)因L_3斜率為正，L_1與L_2斜率均小於 0，且L_2較直線$y=-x$陡，又直線$y=-x$較L_1陡，

故$m_3>m_1>-1>m_2$，故選項(1)錯誤．

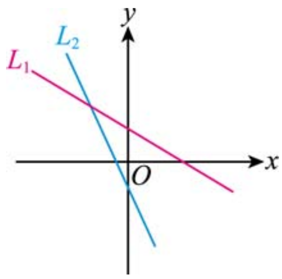
(2)由L_2與L_3垂直，而$L_3 // L_4$，故$m_3=m_4$且$m_2\cdot m_3=-1$，即$m_2\cdot m_4=-1$，故選項(2)正確．

(3)由(1)知$m_1>-1$，故選項(3)錯誤．

(4)由$m_2\cdot m_4=-1$，又$m_2<m_1$，且$m_4>0$，即$m_2\cdot m_4<m_1\cdot m_4\Rightarrow -1<m_1\cdot m_4$，故選項(4)錯誤．

(5) L_4交 y 軸於原點下方，則$c<0$ ．

2. 如右圖，兩直線L_1，L_2的方程式分別為$L_1:x+ay+b=0$，$L_2:cx+y+d=0$，試問下列哪些選項是正確的？(1) $a>0$ (2) $b>0$ (3) $c>0$ (4) $d>0$ (5) $ac>1$ ．



$\boxed{\text{解答}}$：(1)(3)(4)(5)．

$\boxed{\text{解析}}$：因L_1的斜率$m_1=-\dfrac{1}{a}$，x 截距$-b$，L_2的斜率$m_2=-c$，y 截距$-d$，

由圖形知$0>m_1>m_2$，故$0>\dfrac{-1}{a}>-c\Rightarrow 0>-a$，$0>-c$且$\dfrac{-1}{a}>-c$，故$a>0$，$c>0$，

又$\dfrac{-1}{a}>-c\Rightarrow ac\cdot\dfrac{-1}{a}>ac(-c)\Rightarrow -c>-ac^2\Rightarrow ac>1$，故選項(1)(3)(5)正確．

由圖形知L_1的 x 截距$-b>0\Rightarrow b<0$，故選項(2)錯誤，

L_2的 y 截距$-d<0\Rightarrow d>0$，故選項(4)正確．

3. 若$x^2+y^2+dx+ey+f=0$表一圓且與 y 軸相切於原點，則下列哪些選項是正確的？

   (1) $d=0$ (2) $e=0$ (3) $f=0$ (4) $d^2+e^2>0$ (5) $e^2+f^2>0$ ．

$\boxed{\text{解答}}$：(2)(3)(4)．

$\boxed{\text{解析}}$：圓C：$x^2+y^2+dx+ey+f=0$與 y 軸（$x=0$）切於原點(0，0)，故圓C過(0，0)代入得$f=0$，

因C：$x^2+y^2+dx+ey=0$與 y 軸（$x=0$）相切，

令 $x=0$ 代入 C 得 $y^2+ey=0$， 判別式 $D=e^2-4\times 0=0\Rightarrow e=0$，

圓 C ： $x^2+y^2+dx=0$，即 $(x+\frac{d}{2})^2+y^2=\frac{d^2}{4}$，半徑 $r^2=\frac{d^2}{4}\neq 0\Rightarrow d\neq 0$.

三、填充題

1. 已知兩相異直線 $ax+by=1$ 與 $cx+dy=1$ 相交於 $(2,3)$，則過 (a,b) 及 (c,d) 兩點的直線之斜率爲________，且直線方程式爲________ .

$\boxed{\text{解答}}$： $\frac{-2}{3}$， $2x+3y=1$.

$\boxed{\text{解析}}$：由相交於 $(2,3)$ 知 $\begin{cases}2a+3b=1\cdots\cdots①\\2c+3d=1\cdots\cdots②\end{cases}$，

① $-$ ② 得 $2(a-c)+3(b-d)=0\Rightarrow\frac{b-d}{a-c}=\frac{-2}{3}$， 故過 (a,b) 及 (c,d) 兩點的直線斜率爲 $\frac{-2}{3}$，

由 $\begin{cases}2a+3b=1\\2c+3d=1\end{cases}$，知直線 $2x+3y=1$ 同時通過 $(a,\ b)$ 及 $(c,\ d)$，故所求直線爲 $2x+3y=1$.

2. 在坐標平面上，一矩形的四個頂點 $A(0,0),\ B(8,0),\ C(8,5),\ D(0,5)$，若直線 $y=m(x-6)+3$ 將矩形 $ABCD$ 分成面積相等的兩塊，則 m 之值爲________ .

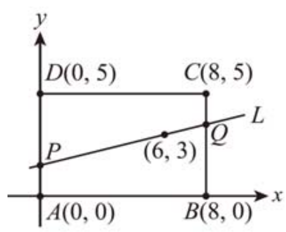
$\boxed{\text{解答}}$： $\frac{1}{4}$.

$\boxed{\text{解析}}$：過平行四邊形對角線交點的直線必平分此平行四邊形爲全等的兩部分，當然面積也平分相等的兩塊。

如圖 $ABCD$ 爲一矩形，直線 L ： $y-3=m(x-6)$ 通過點 $(6,\ 3)$， 且以 m 爲斜率，

設直線 L 可平分矩形 $ABCD$， 必過 $\overline{BD}$ 的中點 $(4,\ \frac{5}{2})$，

$\frac{5}{2}-3=m(4-6)\Rightarrow 4m=1$， $m=\frac{1}{4}$.



3. 給定兩點 $P(-1,2)$ 及 $Q(1,-3)$.
   (1)若直線 $2x+y=k$ 與 $\overline{PQ}$ 相交，則 k 的範圍爲________ .
   (2)若直線 $y=m(x+3)$ 與 $\overline{PQ}$ 相交，則 m 的範圍爲________ .

$\boxed{\text{解答}}$：(1) $-1\leq k\leq 0$. (2) $\frac{-3}{4}\leq m\leq 1$.

$\boxed{\text{解析}}$：(1)令直線 L ： $2x+y-k=0$， L 與 $\overline{PQ}$ 相交 $\Leftrightarrow$ 點 P， Q 在直線 L 的異側或 L 上

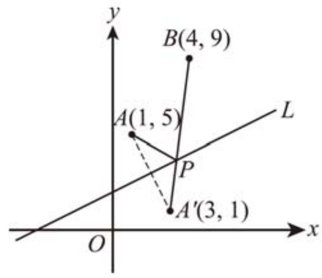
$\Leftrightarrow [2\cdot(-1)+2-k][2\cdot 1+(-3)-k]\le 0 \Leftrightarrow k(k+1)\le 0 \Leftrightarrow -1\le k\le 0$.

(2)同(1)令 L ： $mx-y+3m=0$,

L 與 $\overline{PQ}$ 相交 $\Leftrightarrow [m(-1)-2+3m][m-(-3)+3m]\le 0 \Leftrightarrow 2(m-1)(4m+3)\le 0 \Leftrightarrow \dfrac{-3}{4}\le m\le 1$.

4. 若直線 $L: y=\dfrac{1}{2}x+2$ 及二點 $A(1,5),\ B(4,9)$，在直線 L 上找一點 P，使 $\overline{AP}+\overline{PB}$ 有最小值，則

(1)點 P 坐標爲________ .　　(2)最小值爲________ .



解答：(1) $(\dfrac{10}{3},\ \dfrac{11}{3})$　(2) $\sqrt{65}$.

解析：(1)令 $A(1,\ 5)$ 對 L ： $y=\dfrac{1}{2}x+2$ 的對稱點坐標爲 $A'(s,\ t)$,

則 $\begin{cases} \dfrac{t-5}{s-1}=-2 \text{（} \because \overline{AA'}\perp L \text{）} \\ \dfrac{t+5}{2}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{s+1}{2}+2 \text{（} \because \overline{AA'} \text{ 中點在 } L \text{ 上）} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2s+t-7=0 \\ s-2t-1=0 \end{cases}$ 解得 $A'(s,\ t)=(3,\ 1)$.

(2)設 P 爲 L 上一點，由(1)知 $\overline{AP}=\overline{A'P}$， 欲使 $\overline{AP}+\overline{BP}=\overline{A'P}+\overline{BP}$ 爲最小時（最小值爲 $\overline{A'B}$ ）

爲 A' ， P ， B 三點在一直線上， 即點 P 爲直線 $A'B$ 與 L 的交點,

故解 $\begin{cases} y-9=\dfrac{1-9}{3-4}(x-4) \\ y=\dfrac{1}{2}x+2 \end{cases}$ ，得 $x=\dfrac{10}{3}$， $y=\dfrac{11}{3}$，故所求點 $P(\dfrac{10}{3},\ \dfrac{11}{3})$,

最小值爲 $\overline{AP}+\overline{AB}=\overline{A'B}=\sqrt{(4-3)^2+(9-1)^2}=\sqrt{65}$.

5. 坐標平面上， $A(0,-1),\ B(1,0),\ C(2,-1)$.

(1)△ABC 的外接圓方程式爲________ .

(2)若點 $P(x,y)$ 爲外接圓上任一點，則 $x+y$ 最大值爲________，最小值爲________ .

解答：(1) $x^2+y^2-2x+2y+1=0$.　(2)最大值 $\sqrt{2}$ ，最小值 $-\sqrt{2}$.

解析：(1)求得 $\overline{AB}$ 的垂直平分線方程式爲 $x+y=0$ ⋯⋯①,

$\overline{BC}$ 的垂直平分線方程式爲 $x-y-2=0$ ⋯⋯②,

解①②得 $x=1$， $y=-1$，即圓心 $P(1,\ -1)$，半徑 $r=\overline{AP}=1$,

故圓方程式爲 $(x-1)^2+(y+1)^2=1$，即 $x^2+y^2-2x+2y+1=0$.

(2)令 $x+y=k$，直線 L ： $x+y=k$ 與圓 C ： $x^2+y^2-2x+2y+1=0$，相切或相割,

故將 $y=-x+k$ 代入 C ，得 $x^2+(-x+k)^2-2x+2(-x+k)+1=0$,

$2x^2+(-2k-4)x+(k^2+2k+1)=0$,

此方程式有二相異實根或二相等實根，故判別式大於或等於 0，得 $(-2k-4)^2-8(k^2+2k+1)\ge 0$，

$\Rightarrow -4k^2+8\ge 0$， $k^2-2\le 0$， $-\sqrt{2}\le k\le\sqrt{2}$，

故 $x+y$ 的最大值爲 $\sqrt{2}$，最小值爲 $-\sqrt{2}$ ．

6. 坐標平面上，已知圓 $C: x^2+y^2-4x+6y+k=0$ 與 x 軸相切．
(1)實數 k 之值爲________．　(2)若圓 C 又與直線 $y=mx$ 相切，其中 $m>0$，則 m 值爲________．

解答：(1) 4 ．　(2) $\dfrac{12}{5}$ ．

解析：(1) C ： $(x-2)^2+(y+3)^2=13-k$，圓心 $(2,\ -3)$，半徑 $\sqrt{13-k}$，

$\because C$ 與 x 軸相切，故 $\sqrt{13-k}=3$，解得 $k=4$ ．

(2)圓 C ： $x^2+y^2-4x+6y+4=0$，將 $y=mx$ 代入圓 C，

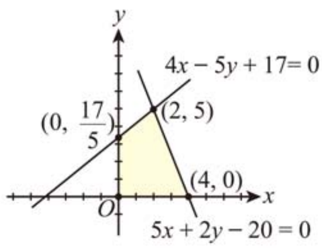
得 $x^2+m^2x^2-4x+6mx+4=0$，整理 $(1+m^2)x^2+(-4+6m)x+4=0$，

相切，故判別式 $(-4+6m)^2-4(1+m^2)\cdot 4=0$，即 $m(5m-12)=0$，故 $m=\dfrac{12}{5}$（$\because m>0$）．

7. 設 (x, y) 爲不等式組 $\begin{cases}4x-5y+17\ge 0\\5x+2y-20\le 0\\x\ge 0\\y\ge 0\end{cases}$ 所表示圖形上的任一點，若 $ax+y$ 在點 $(2,5)$ 有最大值，則 a 的範圍爲________．

解答： $-\dfrac{4}{5}\le a\le\dfrac{5}{2}$ ．

解析：先畫出可行解區域，如右圖：



右圖得可行解區域的頂點爲 $(0,\ 0)$， $(4,\ 0)$， $(2,\ 5)$， $(0,\ \dfrac{17}{5})$，

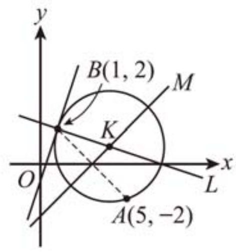
令 $k=ax+y$，將各頂點代入，列表如下：

頂點	$(0,\ 0)$	$(4,\ 0)$	$(2,\ 5)$	$(0,\ \frac{17}{5})$
$ax+y$	0	$4a$	$2a+5$	$\frac{17}{5}$

因 $k=ax+y$ 在點 $(2,\ 5)$ 有最大值爲 $2a+5$，故 $\begin{cases}2a+5\ge 0\\2a+5\ge 4a\\2a+5\ge\dfrac{17}{5}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a\ge\dfrac{-5}{2}\\a\le\dfrac{5}{2}\\a\ge\dfrac{-4}{5}\end{cases}\Leftrightarrow -\dfrac{4}{5}\le a\le\dfrac{5}{2}$ ．

8. 在坐標平面上，一圓通過點 $(5,-2)$，且與直線 $3x-y-1=0$ 相切於點 $(1,2)$，設此圓的方程式為 $x^2+y^2+ax+by+c=0$，則 $a=$________，$b=$________，$c=$________．

解答：$a=-8$，$b=-2$，$c=7$．



解析：設 $A(5,\ -2)$，$B(1,\ 2)$，圓心 K，

圓心 K 在過點 $B(1,\ 2)$，且垂直 $3x-y-1=0$ 的直線 L 上，

求得 L：$x+3y-7=0$……①，

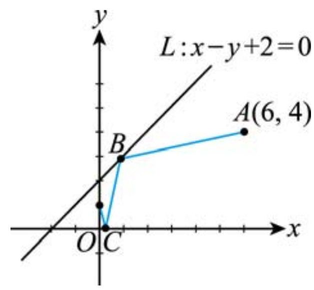
又圓心 K 在 $A(5,\ -2)$ 與 $B(1,\ 2)$ 的垂直平分線 M 上，

求得 M：$x-y-3=0$……②，

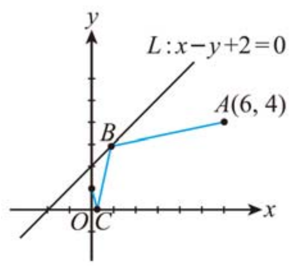
聯立①②得圓心 $K(x,\ y)=(4,\ 1)$，而半徑為 $\overline{KA}=\sqrt{10}$，

故圓方程式為 $(x-4)^2+(y-1)^2=10 \Rightarrow x^2+y^2-8x-2y+7=0$，故 $a=-8$，$b=-2$，$c=7$．

四、計算題



1. 如右圖，坐標平面上，假設一點光源位於點 $A(6,4)$，朝向直線 $L: x-y+2=0$ 射出，已知在 L 上的入射點為 B，而經 L 反射後射向 x 軸，且在 x 軸上的入射點為 C，再反射通過點 $(0,1)$，試求：
(1)點 A 對直線 L 的對稱點坐標．
(2)點 $B,\ C$ 的坐標．



解答：(1) $(2,\ 8)$　(2) $B(\frac{6}{7},\ \frac{20}{7})$，$C(\frac{2}{9},\ 0)$．

解析：(1)設 $A(6,\ 4)$ 對 L：$x-y+2=0$ 的對稱點坐標為 $A'(s,\ t)$，

則由 $\overline{AA'}\perp L$ 得 $\dfrac{t-4}{s-6}=-1$，即 $s+t-10=0$……①，

又 L 平分 $\overline{AA'}$，故 $\overline{AA'}$ 中點 $(\dfrac{6+s}{2},\ \dfrac{4+t}{2})$ 在 L：$x-y+2=0$ 上，得 $s-t+6=0$……②，

聯立①②得 $s=2$，$t=8$，故 A 的對稱點為 $(2,\ 8)$．

(2)設點 $D(0,\ 1)$ 對 x 軸的對稱點為 D'，則 $D'(0,\ -1)$，由(1)得 A 對 L 之對稱點 $A'(2,\ 8)$，

因 A'，B，C，D' 四點在一直線上，而直線 $A'D'$ 方程式為 $y+1=\dfrac{8-(-1)}{2-0}(x-0)$，

即 $9x-2y-2=0$ 與 L：$x-y+2=0$ 聯立得點 $B(\dfrac{6}{7},\ \dfrac{20}{7})$，

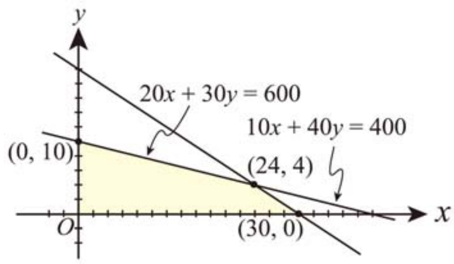
$9x-2y-2=0$ 與 x 軸交於點 $C(\dfrac{2}{9},\ 0)$，得 $B(\dfrac{6}{7},\ \dfrac{20}{7})$，$C(\dfrac{2}{9},\ 0)$．

2. 設某公司用 A, B 兩種機器生產某產品，A 機器每台需成本 20 萬元及 10 萬元的維護費，且每台有年利潤 3 萬元，而 B 機器每台需成本 30 萬元及 40 萬元的維護費，且每台有年利潤 8 萬元．但公司編制機器成本不超過 600 萬元，且總維護費不超過 400 萬元，則此公司每種機器應各購置多少台以求得最大年利潤，並算出最大年利潤．

	機器 A	機器 B	費用上限
機器成本	20	30	600
維護費	10	40	400
每台年利潤	3	8	

解答：A 機器 24 台，B 機器 4 台，最大年利潤 104 萬元．

解析：設購置 A 機器 x 台，B 機器 y 台，



則限制條件為 $\begin{cases} 20x+30y\le 600 \\ 10x+40y\le 400 \\ x,\ y \text{ 為非負整數} \end{cases}$，不等式組區域圖形如圖：

目標函數為 $3x+8y=k$，　表斜率 $\dfrac{-3}{8}$ 且 y 截距為 $\dfrac{k}{8}$ 的直線，

當通過 $20x+30y=600$ 與 $10x+40y=400$ 的交點 $(24,\ 4)$，

即 $x=24$，$y=4$ 時，有最大值 $k=3\times 24+8\times 4=104$，

故購置 A 機器 24 台，B 機器 4 台，有最大年利潤 104 萬元．

3. 今年果農台雄採收椪柑共獲 1080 粒，要打包裝箱上市，已知大箱一箱可裝 25 粒，小箱一箱可裝 8 粒，每個大箱子成本 60 元，每個小箱子成本 20 元，請問如何分配能將這 1080 粒椪柑剛好裝完，而所用的箱子成本花費最少．

解答：用 40 個大箱子，10 個小箱子，最少成本為 2600 元．

解析：設用 x 個大箱，y 個小箱，那麼 x，y 需滿足下列條件：$\begin{cases} 25x+8y=1080\cdots\cdots① \\ x,\ y \text{ 都是非負整數}\cdots\cdots② \end{cases}$，

花費箱子成本為 $p=60x+20y\cdots\cdots③$，

由①得 $y=\dfrac{1}{8}(1080-25x)=135-\dfrac{25}{8}x\cdots\cdots④$，

④代入③得 $p=60x+20(135-\dfrac{25}{8}x)=-\dfrac{5}{2}x+2700\cdots\cdots⑤$，

在 xp 坐標平面上，⑤表斜率 $-\dfrac{5}{2}$，p 截距 2700 的直線，

而 p 隨著 x 的增大而減小，又由②④知 x 滿足 $0\le x\le \dfrac{216}{5}$，且 x 是 8 的倍數，

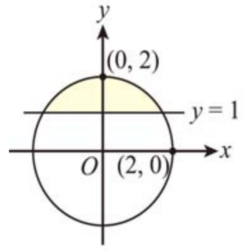
故當 $x=40$ 時，$y=10$，p 有最小值 $=-\dfrac{5}{2}\times 40+2700=2600$，

即用 40 個大箱子，10 個小箱子，最少成本為 2600 元．

4. (1)在坐標平面上，試作由下列兩個不等式所定義的區域 R：$\begin{cases} x^2+y^2\le 4 \\ y\ge 1 \end{cases}$.

(2)求 $x+y$ 在區域 R 上的最大值與最小值．

解答：(1)略．　(2)最大值 $2\sqrt{2}$，最小值 $-\sqrt{3}+1$ ．

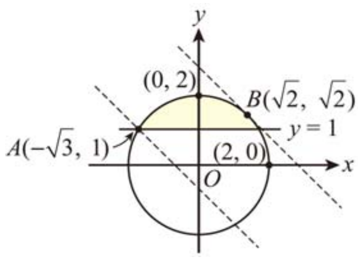


解析：(1) 如右上圖 R 爲陰影區域．

(2)令 $x+y=k$ 表示斜率爲 -1 的直線，

欲在 R：$\begin{cases} x^2+y^2\le 4 \\ y\ge 1 \end{cases}$ 上，使 k 有最小值發生在

$x+y=k$ 通過 $\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ y=1 \end{cases}$ 的一個交點 $A(-\sqrt{3},\ 1)$，



如圖，此時，最小值 $k=-\sqrt{3}+1$ ．

又 k 最大值發生在直線 $x+y=k$ 與圓 $x^2+y^2=4$ 相切的點 B 位置，

此時，$\begin{cases} x+y=k \\ x^2+y^2=4 \end{cases}$ 恰有一組解，即 $x^2+(k-x)^2=4$， 亦即 $2x^2-2kx+(k^2-4)=0$ 有重根，

方程組的解就是切點，判別式：$(-2k)^2-4\times 2(k^2-4)=0$，得 $k=\pm 2\sqrt{2}$（負不合），

即 $k=2\sqrt{2}$ 時， $2x^2-2kx+k^2-4=0$ 的重根 $x=\dfrac{2k}{2\cdot 2}=\sqrt{2}$，

即 $x=\sqrt{2}$ 時， $y=\sqrt{2}$，點 $B(x,\ y)=(\sqrt{2},\ \sqrt{2})$ 時， $x+y=2\sqrt{2}$ 爲最大值．