<table>
<tr><td colspan="7">高雄市明誠中學 高二數學平時測驗　　日期：101.06.19</td></tr>
<tr><td rowspan="2">範圍</td><td rowspan="2">4-3 雙曲線</td><td>班級</td><td>二年____班</td><td rowspan="2">姓名</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>座號</td><td></td></tr>
</table>

## 一、填充題 (每題 10 分 )

1.雙曲線 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$ 的(1)兩焦點坐標為____________．(2)兩頂點坐標為____________．

解答 (1)(3，0)，(－3，0);(2)(2，0)，(－2，0)

解析 當 $\frac{(x-0)^2}{2^2}-\frac{(y-0)^2}{\sqrt{5}^2}=1$ 1 時，$a=2$，$b=\sqrt{5}$，$c=\sqrt{a^2+b^2}=3$，中心(0，0)，

開口 $x$ 方向的雙曲線，兩焦點坐標(3，0)，(－3，0)，兩頂點坐標(2，0)，(－2，0)．

2.雙曲線 $25y^2-16x^2=100$ 的(1)貫軸長= ____________．(2)共軛軸長= ____________．

解答 (1)4;(2)5

解析 雙曲線 $25y^2-16x^2=100$，即 $-\frac{x^2}{\frac{25}{4}}+\frac{y^2}{4}=1$，開口 $x$ 方向的雙曲線，

$a=2$，$b=\frac{5}{2}$，貫軸長 $2a=4$，共軛軸長 $2b=5$．

3.以 $2x+y+1=0$ 與 $2x-y+3=0$ 為兩漸近線，且

(1)經過原點的雙曲線方程式為____________．(2)它的貫軸長= ____________．

解答 (1) $\frac{(x+1)^2}{\frac{3}{4}}-\frac{(y-1)^2}{3}=1$;(2) $\sqrt{3}$

解析 以 $2x+y+1=0$ 與 $2x-y+3=0$ 為兩漸近線的雙曲線，

設其方程式為$(2x+y+1)(2x-y+3)=k$，

雙曲線過原點，代入$(2\times0+0+1)(2\times0-0+3)=k$，即 $k=3$，

此雙曲線方程式為$(2x+y+1)(2x-y+3)=3$，

即 $4x^2-y^2+8x+2y=0$，亦即 $\frac{(x+1)^2}{\frac{3}{4}}-\frac{(y-1)^2}{3}=1$，開口 $x$ 方向的雙曲線，

且 $a=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$b=\sqrt{3}$，則貫軸長$=2a=\sqrt{3}$．

4.雙曲線 $\Gamma$ 之中心為(2，1)，共軛軸平行 $y$ 軸，過 $\Gamma$ 之一頂點之兩焦半徑為 9 與 1，則

(1) $\Gamma$ 之標準式為____________．　(2) $\Gamma$ 之焦點坐標為____________．

解答 (1) $\frac{(x-2)^2}{16}-\frac{(y-1)^2}{9}=1$;(2) (－3，1)，(7，1)

解析 $\begin{cases}c+a=9\\c-a=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c=5\\a=4\end{cases}\Rightarrow b=3$，開口 $x$ 方向的雙曲線，故雙曲線為 $\frac{(x-2)^2}{16}-\frac{(y-1)^2}{9}=1$，

二焦點(－3，1)，(7，1)．

5.雙曲線 $4x^2-y^2-8x-4y+4=0$ 之

(1)頂點坐標為_____．(2)漸近線方程式為_____．(3)雙曲線上任一點到二漸近線之距離的乘積= ____．

解答 (1) $(1，-4)，(1，0)$;(2) $2x-y-4=0，2x+y=0$;(3) $\dfrac{4}{5}$

解析 $4x^2-y^2-8x-4y+4=0$ 配方 $\Rightarrow 4(x-1)^2-(y+2)^2=-4\Rightarrow -\dfrac{(x-1)^2}{1}+\dfrac{(y+2)^2}{4}=1$，

開口 $y$ 方向的雙曲線，$\therefore$ 中心$(1，-2)$，$a=2$，$b=1\Rightarrow c^2=1+4=5$，

頂點$(1，-4)$，$(1，0)$，漸近線 $y+2=\pm\dfrac{2}{1}(x-1)\Rightarrow 2x-y-4=0$ 或 $2x+y=0$，

雙曲線上任一點到二漸近線之距離的乘積$=\dfrac{a^2b^2}{a^2+b^2}=\dfrac{4}{5}$ .

6.等軸雙曲線 $\Gamma$ 之中心爲$(2，1)$，正焦弦長 $2\sqrt{2}$，一漸近線方程式爲 $x-y-1=0$，

(1)$\Gamma$ 之標準式爲____________ .　(2)若 $\Gamma$ 之貫軸平行 $x$ 軸，則焦點坐標爲____________ .

解答 (1) $\dfrac{(x-2)^2}{2}-\dfrac{(y-1)^2}{2}=\pm 1$;(2) $(0，1)$，$(4，1)$

解析 (1)$\because\Gamma$ 爲等軸雙曲線，$\therefore a=b$，又正焦弦長 $2\sqrt{2}$，　$\therefore \dfrac{2b^2}{a}=\dfrac{2a^2}{a}=2\sqrt{2}$

$\Rightarrow a^2-\sqrt{2}a=0\Rightarrow a=\sqrt{2}$ 或 0（不合），

$\because$ 中心在$(2，1)$，$\therefore\Gamma$：$\dfrac{(x-2)^2}{2}-\dfrac{(y-1)^2}{2}=\pm 1$ .

(2)貫軸平行 $x$ 軸時，開口 $x$ 方向的雙曲線，$\dfrac{(x-2)^2}{2}-\dfrac{(y-1)^2}{2}=1\Rightarrow a^2=2$，$b^2=2$，

$\therefore c^2=2+2=4\Rightarrow c=2$，故焦點 $F'(0，1)$，$F(4，1)$ .

7.已知一雙曲線方程式爲 $\left|\sqrt{(x-4)^2+(y+2)^2}-\sqrt{(x+6)^2+(y+2)^2}\right|=8$，試求：

(1)此雙曲線的貫軸長= ____________ .　(2)貫軸上頂點坐標____________ .

(3)漸近線方程式____________ .　(4)共軛雙曲線方程式____________ .

(5)若有一橢圓與上述雙曲線共焦點且長軸長爲 12，則此橢圓方程式爲____________ .

解答 (1) 8;(2) $(3，-2)$與$(-5，-2)$;(3) $3x+4y+11=0$ 及 $3x-4y-5=0$;

(4) $\dfrac{(y+2)^2}{9}-\dfrac{(x+1)^2}{16}=1$;(5) $\dfrac{(x+1)^2}{36}+\dfrac{(y+2)^2}{11}=1$

解析 雙曲線方程式：$\left|\sqrt{(x-4)^2+(y+2)^2}-\sqrt{(x+6)^2+(y+2)^2}\right|=8$，

設 $P(x,y)$,　$F(4,-2)$,　$F'(-6,-2)\Rightarrow|\overline{PF}-\overline{PF'}|=8$

開口 $x$ 方向的雙曲線，則兩焦點 $F(4，-2)$，$F'(-6，-2)$，中心$\left(\dfrac{4-6}{2}，-2\right)=(-1，-2)$，

貫軸長$=2a=8\Rightarrow a=4$，$c=-1-(-6)=5$，$\therefore b=\sqrt{c^2-a^2}=3$，

貫軸頂點坐標爲$(-1+4，-2)$與$(-1-4，-2)$，即$(3，-2)$與$(-5，-2)$，

此雙曲線標準式爲 $\dfrac{(x+1)^2}{16}-\dfrac{(y+2)^2}{9}=1$

$\Rightarrow$ 漸近線 $y+2=\pm\dfrac{3}{4}(x+1)\Rightarrow 3x+4y+11=0$ 及 $3x-4y-5=0$，

其共軛雙曲線方程式 $-\dfrac{(x+1)^2}{16}+\dfrac{(y+2)^2}{9}=1$，

另一橢圓焦點$(4，-2)$，$(-6，-2)$，中心$(-1，-2)$，$c=5$，$2a=12$，$a=6$

$\Rightarrow b^2=a^2-c^2=36-25=11$，$\therefore$此橢圓方程式爲$\dfrac{(x+1)^2}{36}+\dfrac{(y+2)^2}{11}=1$．

8.試求雙曲線$\dfrac{y^2}{9}-\dfrac{x^2}{7}=1$之　(1)兩焦點坐標爲____________．(2)漸近線斜率爲____________．

解答 (1) $(0，4)$，$(0，-4)$;(2)$\pm\dfrac{3\sqrt{7}}{7}$

解析 雙曲線$\dfrac{y^2}{9}-\dfrac{x^2}{7}=1$，中心$(0，0)$，$a^2=9\Rightarrow a=3$，$b^2=7\Rightarrow b=\sqrt{7}$，

$c^2=a^2+b^2=9+7=16\Rightarrow c=4$，且開口 $y$ 方向雙曲線

$\therefore$兩焦點坐標爲$(0，4)$，$(0，-4)$，漸近線斜率$=\pm\dfrac{a}{b}=\pm\dfrac{3}{\sqrt{7}}=\pm\dfrac{3\sqrt{7}}{7}$．

9.求雙曲線$\dfrac{(x-1)^2}{16}-\dfrac{(y+3)^2}{9}=1$之兩漸近線交點坐標爲____________．

解答 $(1，-3)$

解析 雙曲線$\dfrac{(x-1)^2}{16}-\dfrac{(y+3)^2}{9}=1$之兩漸近線交點坐標爲雙曲線之中心，即$(1，-3)$．

10.求下列圓錐曲線方程式：（請化成標準式）

(1)以 $2x+y+3=0$ 與 $2x-y-1=0$ 爲二漸近線，且過$(0，0)$之雙曲線方程式____________．

(2)長軸一頂點$(9，2)$，短軸一頂點$(5，-1)$且軸平行兩坐標軸之橢圓方程式____________．

(3)軸平行 $x$ 軸且頂點$(1，2)$，焦距爲 2 的拋物線方程式____________．（二解）

解答 (1) $(2x+y+3)(2x-y-1)=-3$;(2)$\dfrac{(x-5)^2}{16}+\dfrac{(y-2)^2}{9}=1$;(3) $(y-2)^2=\pm 8(x-1)$

解析 (1)設所求雙曲線方程式爲$(2x+y+3)(2x-y-1)=k$（$k\neq 0$），

$(0，0)$代入，則 $k=3\times(-1)=-3$，$\therefore$雙曲線方程式爲$(2x+y+3)(2x-y-1)=-3$．

(2)長軸一頂點$(9，2)$，短軸一頂點$(5，-1)$且軸平行兩坐標軸，

則長軸在 $y=2$ 上，短軸在 $x=5$ 上，中心$(5，2)\Rightarrow a=4$，$b=3$，

$x$ 方向的橢圓，故所求橢圓方程式爲$\dfrac{(x-5)^2}{16}+\dfrac{(y-2)^2}{9}=1$．

(3)軸平行 $x$ 軸且頂點$(1，2)\Rightarrow$ 軸的方程式爲 $y=2$，開口 $x$ 方向拋物線

又$|c|=2\Rightarrow c=\pm 2$，　故所求拋物線方程式爲$(y-2)^2=\pm 8(x-1)$．

11.試判別下列各圖形，寫出名稱．

(1) $(x-3y+1)^2+(21x+5y-3)^2=0$：____________．

(2) $9x^2-4y^2+18x+24y+9=0$：____________．

(3) $4x^2-4xy+y^2+4x-2y+2=0$：____________．

解答 (1)一點$(\dfrac{1}{17}，\dfrac{6}{17})$;(2)雙曲線;(3)沒有圖形

$\boxed{解析}$ (1) $(x-3y+1)^2+(21x+5y-3)^2=0 \Rightarrow \begin{cases} x-3y+1=0 \\ 21x+5y-3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{17} \\ y=\dfrac{6}{17} \end{cases}$，故圖形爲一點$(\dfrac{1}{17},\dfrac{6}{17})$．

(2) $9x^2-4y^2+18x+24y+9=0$，配方 $9(x+1)^2-4(y-3)^2=-36 \Rightarrow \dfrac{(y-3)^2}{9}-\dfrac{(x+1)^2}{4}=1$，

表中心爲$(-1，3)$，貫軸爲 $x+1=0$，共軛軸爲 $y-3=0$ 的雙曲線．

(3) $4x^2-4xy+y^2+4x-2y+2=0 \Rightarrow (2x-y)^2+2(2x-y)+2=0 \Rightarrow (2x-y+1)^2+1=0$，

不合沒有圖形．

12.錐線 $\dfrac{x^2}{12-k}+\dfrac{y^2}{3-k}=1$（$k$ 爲實數）爲一雙曲線時，試求：

(1) $k$ 的範圍爲__________．(2)其焦點坐標爲__________．

$\boxed{解答}$ (1)$3<k<12$;(2)$(3，0)，(-3，0)$

$\boxed{解析}$ (1) $\dfrac{x^2}{12-k}+\dfrac{y^2}{3-k}=1$ 爲一雙曲線 $\Rightarrow (12-k)(3-k)<0 \Rightarrow (k-12)(k-3)<0 \Rightarrow 3<k<12$．

(2)此時方程式爲 $\dfrac{x^2}{12-k}-\dfrac{y^2}{k-3}=1$，$a^2=12-k$，$b^2=k-3$ $\Rightarrow c^2=a^2+b^2=9 \Rightarrow c=3$，

貫軸在 $x$ 軸上，中心$(0，0)$，故焦點爲$(3，0)，(-3，0)$．

13.等軸雙曲線 $\Gamma$ 有一條漸近線爲 $x-y=0$，中心坐標爲$(1，1)$，且 $\Gamma$ 通過點$(3，0)$，則

(1) $\Gamma$ 的方程式爲__________．(2)另一漸近線方程式爲__________．

$\boxed{解答}$ (1) $\dfrac{(x-1)^2}{3}-\dfrac{(y-1)^2}{3}=1$;(2)$x+y=2$

$\boxed{解析}$ 等軸雙曲線 $\Gamma$ 的一漸近線爲 $x-y=0$，中心$(1，1)$，

則另一漸近線爲 $x+y=d$，$d$ 爲常數，且 $1+1=d$，即 $d=2$，

所以 $\Gamma$ 的方程式爲$(x-y)(x+y-2)=k$，$k$ 爲常數，

點$(3，0)$在 $\Gamma$ 上，所以$(3-0)(3+0-2)=k$，即 $k=3$，方程式爲

$(x-y)(x+y-2)=3 \Rightarrow x^2-y^2-2x+2y-3=0 \Rightarrow (x-1)^2-(y-1)^2=3 \Rightarrow \dfrac{(x-1)^2}{3}-\dfrac{(y-1)^2}{3}=1$．

14.已知一雙曲線之兩焦點爲$(2，4)$及$(-6，4)$且共軛軸長爲 4，則此雙曲線之

(1)共軛雙曲線方程式爲__________． (2)兩漸近線方程式爲__________．

$\boxed{解答}$ (1) $-\dfrac{(x+2)^2}{12}+\dfrac{(y-4)^2}{4}=1$;(2) $y-4=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}(x+2)$

$\boxed{解析}$ (1)兩焦點 $F_1(2，4)$，$F_2(-6，4)$，$\overline{F_1F_2}=8=2c$，$c=4$，

共軛軸長 $2b=4$，$b=2$，$a^2=c^2-b^2=4^2-2^2=12$，

$\overline{F_1F_2}$ 之中點爲中心，中心$(h，k)=(-2，4)$，得雙曲線：$\dfrac{(x+2)^2}{12}-\dfrac{(y-4)^2}{4}=1$，

故其共軛雙曲線：$\dfrac{(x+2)^2}{12}-\dfrac{(y-4)^2}{4}=-1$，即 $-\dfrac{(x+2)^2}{12}+\dfrac{(y-4)^2}{4}=1$．

(2)漸近線爲 $y-4=\pm\dfrac{2}{\sqrt{12}}(x+2) \Rightarrow (x+2)\pm\sqrt{3}(y-4)=0$．

15.中心(4，3)，貫軸在直線 $x=4$ 上，共軛軸長爲 8，且兩焦點的距離爲 10 的

(1)雙曲線方程式爲________.(2)已知 $P$ 在雙曲線上，且 $F_1,F_2$ 爲兩焦點，則 $|\overline{PF_1}-\overline{PF_2}|=$______________.

解答 (1) $-\dfrac{(x-4)^2}{16}+\dfrac{(y-3)^2}{9}=1$;(2)6

解析 中心(4，3)，貫軸在直線 $x=4$ 上的雙曲線，設其方程式爲 $-\dfrac{(x-4)^2}{b^2}+\dfrac{(y-3)^2}{a^2}=1$，

兩焦點距離爲 10，$\therefore c=5$，共軛軸長 $=2b=8$，$\therefore b=4\Rightarrow a=\sqrt{c^2-b^2}=\sqrt{25-16}=3$，

此雙曲線方程式爲 $-\dfrac{(x-4)^2}{16}+\dfrac{(y-3)^2}{9}=1$，

設 $P$ 在雙曲線上，$F_1$，$F_2$ 爲兩焦點，則 $|\overline{PF_1}-\overline{PF_2}|=2a=6$.

16.二焦點$(-7,-1)$，$(3,-1)$，一漸近線斜率爲 $-\dfrac{3}{4}$ 之雙曲線方程式爲____________.

解答 $\dfrac{(x+2)^2}{16}-\dfrac{(y+1)^2}{9}=1$

解析 二焦點 $F'(-7,-1)$，$F(3,-1)$，$\therefore$中心$(-2,-1)$，$c=5$，開口 $x$ 方向雙曲線

漸近線斜率 $\pm\dfrac{b}{a}=\pm\dfrac{3}{4}\Rightarrow a=4t,\quad b=3t$，且 $c^2=a^2+b^2$

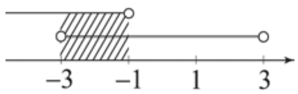
$(4t)^2+(3t)^2=5^2\Rightarrow t=1$，$a=4,\quad b=3\Rightarrow\dfrac{(x+2)^2}{16}-\dfrac{(y+1)^2}{9}=1$.

17.$\dfrac{(x+2)^2}{9-t^2}+\dfrac{(y-2)^2}{t+1}=1$ 圖形爲貫軸平行 $x$ 軸的雙曲線，則 $t$ 的範圍爲______________.

解答 $-3<t<-1$

解析 $\dfrac{(x+2)^2}{9-t^2}+\dfrac{(y-2)^2}{t+1}=1$ 圖形爲貫軸平行 $x$ 軸的雙曲線，

$\therefore\begin{cases}9-t^2>0\\t+1<0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-3<t<3\\t<-1\end{cases}$，$\therefore -3<t<-1$.




18.設一雙曲線的二漸近線爲 $x+2y-5=0$ 與 $x-2y+3=0$，其一焦點爲$(1,2+\sqrt{5})$，則其方程式爲_____.

解答 $-\dfrac{(x-1)^2}{4}+\dfrac{(y-2)^2}{1}=1$

解析 $\begin{cases}x-2y=-3\\x+2y=5\end{cases}\Rightarrow$ 中心(1，2)，又一焦點爲$(1,2+\sqrt{5})$，$\therefore$貫軸平行 $y$ 軸且 $c=\sqrt{5}$，

由一漸近線斜率爲 $\dfrac{1}{2}$，得 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow b=2a$，

$\because a^2+b^2=c^2$，$\therefore a^2+(2a)^2=5\Rightarrow a=1$，$b=2$，故方程式爲 $-\dfrac{(x-1)^2}{4}+\dfrac{(y-2)^2}{1}=1$.

19.已知雙曲線通過(2，0)且兩漸近線方程式爲 $5x-4y=0$，$5x+4y=0$，求其共軛軸長爲____________.

解答　5

解析　設雙曲線方程式$(5x-4y)(5x+4y)=k$，過(2，0) $\Rightarrow (10-0)(10+0)=k \Rightarrow k=100$，

$\therefore$雙曲線方程式爲$(5x-4y)(5x+4y)=100 \Rightarrow 25x^2-16y^2=100$

$\Rightarrow \dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{\frac{25}{4}}=1$，共軛軸長$=2\sqrt{\dfrac{25}{4}}=2\times\dfrac{5}{2}=5$ .

20.已知一雙曲線的兩焦點與橢圓 $\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{6}=1$ 的兩焦點相同，且貫軸長是 $2\sqrt{5}$，則此雙曲線方程式爲_.

解答　$\dfrac{x^2}{5}-\dfrac{y^2}{25}=1$

解析　橢圓 $\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{6}=1$，$a'^2=36$，$b'^2=6 \Rightarrow c'^2=\sqrt{a'^2-b'^2}=\sqrt{36-6}=\sqrt{30}$，

$\therefore$雙曲線的兩焦點爲$(\pm\sqrt{30}，0)$，又貫軸長 $2a=2\sqrt{5}$，則 $a=\sqrt{5}$

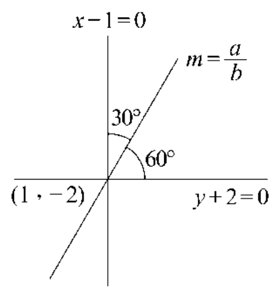
$\Rightarrow c=\sqrt{30}$，$b^2=c^2-a^2=30-5=25$，$\therefore$雙曲線方程式爲 $\dfrac{x^2}{5}-\dfrac{y^2}{25}=1$ .

21.雙曲線 $\dfrac{x^2}{k}-\dfrac{y^2}{9}=1$ 上任一點到其二焦點的距離差爲 4，則 $k=$____________.

解答　4

解析　雙曲線 $\dfrac{x^2}{k}-\dfrac{y^2}{9}=1$ 上任一點到其二焦點的距離差爲 4$\Rightarrow$ 貫軸長 $2a=4 \Rightarrow 2\sqrt{k}=4 \Rightarrow k=4$ .

22.一雙曲線的中心(1，$-2$)，貫軸平行 $y$ 軸，漸近線與貫軸夾角 30°，中心到焦點距離爲 1，則此雙曲線方程式爲__________.




解答　$\dfrac{(y+2)^2}{\frac{3}{4}}-\dfrac{(x-1)^2}{\frac{1}{4}}=1$

解析　雙曲線之中心(1，$-2$)，貫軸平行 $y$ 軸，

設雙曲線方程式爲$-\dfrac{(x-1)^2}{b^2}+\dfrac{(y+2)^2}{a^2}=1$，則漸近線斜率 $=\pm\dfrac{a}{b}$，

因漸近線與貫軸夾角 30°，則一漸近線斜角爲 60°　$\Rightarrow \dfrac{a}{b}=\tan 60°=\sqrt{3} \Rightarrow a=\sqrt{3}\,b$……①

又中心到焦點距離$=c=1 \Rightarrow a^2+b^2=1$……②，①代入②得 $b^2=\dfrac{1}{4}$，$a^2=\dfrac{3}{4}$，

故所求爲 $\dfrac{(y+2)^2}{\frac{3}{4}}-\dfrac{(x-1)^2}{\frac{1}{4}}=1$ .

23.已知兩圓 $C_1$：$x^2+y^2=16$，$C_2$：$(x-10)^2+y^2=4$，若動圓 $C$ 與 $C_1$，$C_2$ 均相切，則此動圓 $C$ 之圓心軌跡方程式爲____________.

解答　$\dfrac{(x-5)^2}{1}-\dfrac{y^2}{24}=1$ 或 $\dfrac{(x-5)^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$

解析 已知 $C_1$ 之圓心 $O_1(0,0)$，半徑 $r_1=4$，$C_2$ 之圓心 $O_2(10,0)$，半徑 $r_2=2$，

設動圓 $C$ 之圓心 $O(x,y)$，半徑 $r$

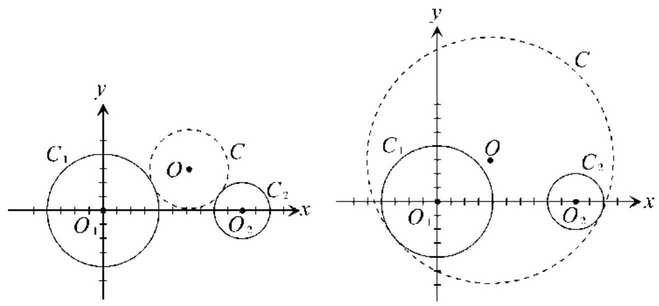
(1) ①若 $C$ 與 $C_1$，$C_2$ 均外切，則 $\overline{OO_1}-\overline{OO_2}=(r+4)-(r+2)=2$，

②若 $C$ 與 $C_1$，$C_2$ 均內切，則 $\overline{OO_2}-\overline{OO_1}=(r-2)-(r-4)=2$，

由①②得 $|\overline{OO_1}-\overline{OO_2}|=2$，又 $\overline{O_1O_2}=10$，

故 $O$ 之軌跡爲以 $O_1$，$O_2$ 爲焦點，貫軸長爲 2 的雙曲線，其中心爲$(5,0)$，$2a=2$，$2c=10$

$\Rightarrow a=1$，$c=5$，$b^2=c^2-a^2=25-1=24$，所求軌跡方程式爲 $\dfrac{(x-5)^2}{1}-\dfrac{y^2}{24}=1$ .




(2)①若 $C$ 與 $C_1$ 外切，與 $C_2$ 內切，則 $\overline{OO_1}-\overline{OO_2}=(r+4)-(r-2)=6$，

②若 $C$ 與 $C_1$ 內切，與 $C_2$ 外切，則 $\overline{OO_2}-\overline{OO_1}=(r+2)-(r-4)=6$，

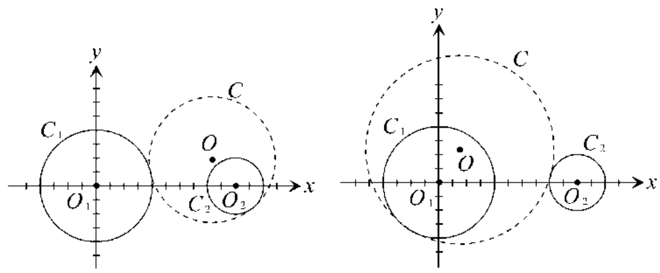
由①②得 $|\overline{OO_1}-\overline{OO_2}|=6$，又 $\overline{O_1O_2}=10$，

故 $O$ 之軌跡方程式爲以 $O_1$，$O_2$ 爲焦點，貫軸長爲 6 的雙曲線，

其中心爲$(5,0)$，$2a=6$，$2c=10\Rightarrow a=3$，$c=5$，$b^2=c^2-a^2=25-9=16$，

所求軌跡方程式爲 $\dfrac{(x-5)^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$，

故由(1)(2)可知軌跡方程式爲 $\dfrac{(x-5)^2}{1}-\dfrac{y^2}{24}=1$ 或 $\dfrac{(x-5)^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$ .



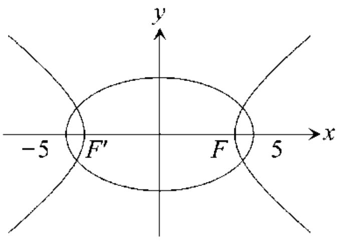

24.一雙曲線的頂點與焦點分別爲橢圓 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 的焦點與頂點，則此雙曲線的方程式爲__________ .

解答 $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$

解析 橢圓 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$，中心$(0,0)$，$c^2=25-9=16\Rightarrow c=4$，$a^2=25\Rightarrow a=5$，

故雙曲線之中心$(0,0)$，貫軸在 $x$ 軸上，中心到頂點距離 $a=4$，中心到焦點距離 $c=5$，

故雙曲線之方程式爲 $\dfrac{x^2}{4^2}-\dfrac{y^2}{5^2-4^2}=1$，即 $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$ .




25.雙曲線 $\dfrac{x^2}{4-k}+\dfrac{y^2}{9-k}=1$ 之貫軸長爲共軛軸長的 2 倍，則 $k$ 之値爲____________．

解答　5

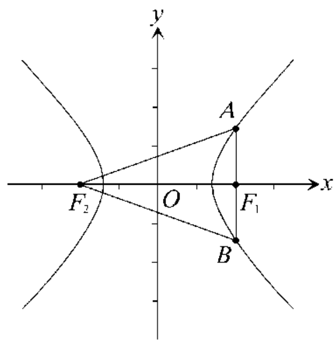
解析　$\dfrac{x^2}{4-k}+\dfrac{y^2}{9-k}=1$ 爲雙曲線，$\because 9-k>4-k$，$\therefore 9-k>0$，$4-k<0$

$\Rightarrow -\dfrac{x^2}{k-4}+\dfrac{y^2}{9-k}=1 \Rightarrow a^2=9-k$，$b^2=k-4$，$a=2b \Rightarrow \sqrt{9-k}=2\sqrt{k-4} \Rightarrow k=5$．

26.雙曲線 $\Gamma$∶$x^2-y^2=8$,兩焦點 $F_1,F_2$,弦 $\overline{AB}$ 通過 $F_1$,且 $\overline{AB}$ 長爲 10,則 $\triangle ABF_2$ 的周長爲____________．

解答　$20+8\sqrt{2}$

解析　$x^2-y^2=8 \Rightarrow \dfrac{x^2}{8}-\dfrac{y^2}{8}=1$，$\therefore a=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$．




由定義可知 $\begin{cases}\overline{AF_2}-\overline{AF_1}=2a=4\sqrt{2}\cdots\cdots①\\ \overline{BF_2}-\overline{BF_1}=2a=4\sqrt{2}\cdots\cdots②\end{cases}$,

① + ② $\Rightarrow (\overline{AF_2}+\overline{BF_2})-(\overline{AF_1}+\overline{BF_1})=8\sqrt{2}$，

$\overline{AF_2}+\overline{BF_2}=8\sqrt{2}+(\overline{AF_1}+\overline{BF_1})=8\sqrt{2}+10$,

$\triangle ABF_2$ 之周長$=(\overline{AF_2}+\overline{BF_2})+\overline{AB}=(8\sqrt{2}+10)+10=20+8\sqrt{2}$．

27.設 $P$ 爲雙曲線 $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$ 上一點且位在第一象限，若 $F_1$，$F_2$ 爲雙曲線的兩個焦點，且 $\overline{PF_1}$ ∶ $\overline{PF_2}$ = 1∶3，則 $\triangle F_1PF_2$ 的周長= ____________．

解答　22

解析　$\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$ 中，$a^2=9$，$b^2=16 \Rightarrow c^2=a^2+b^2=25 \Rightarrow c=5$,

設 $\overline{PF_1}=t$，則 $\overline{PF_2}=3t$，$\overline{PF_2}-\overline{PF_1}=2a \Rightarrow 3t-t=2\times 3=6 \Rightarrow t=3$,

又 $\overline{F_1F_2}=2c=10$，故 $\triangle F_1PF_2$ 的周長$=\overline{PF_1}+\overline{PF_2}+\overline{F_1F_2}=3+9+10=22$．

28.有一橢圓與一雙曲線有共同的焦點 $F_1$， $F_2$， 且雙曲線的貫軸長和橢圓的短軸長相等．設 $P$ 爲此橢圓與雙曲線的一個交點，且 $\overline{F_1F_2}=12$， 則 $\overline{PF_1}\times\overline{PF_2}=$____________．

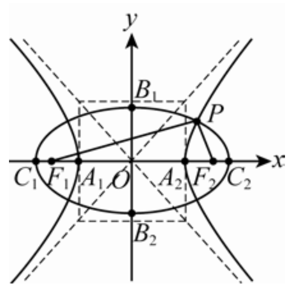
解答　36

解析　坐標化，設 $F_1(-6,\ 0)$， $F_2(6,\ 0)$， $\overline{A_1A_2}=2k=\overline{B_1B_2}$， $\overline{C_1C_2}=2a$，

由橢圓定義 $\overline{PF_1}+\overline{PF_2}=2a\cdots\cdots①$，

$a^2=k^2+6^2 \Rightarrow a^2-k^2=36$，

由雙曲線定義 $|\overline{PF_1}-\overline{PF_2}|=2k\cdots\cdots②$，



①②平方，得 $(\overline{PF_1}+\overline{PF_2})^2=4a^2\cdots\cdots$③，

$(\overline{PF_1}-\overline{PF_2})^2=4k^2\cdots\cdots$④，

由③−④ $\Rightarrow 4\overline{PF_1}\times\overline{PF_2}=4(a^2-k^2)=4\times 36\Rightarrow \overline{PF_1}\times\overline{PF_2}=36$ .

29.雙曲線 $\dfrac{(x-2)^2}{4}-\dfrac{(y-4)^2}{5}=1$ 的兩焦點爲 $F, F'$ 且過點 $P$, 若 $\angle FPF'=60°$, 求 $\triangle PFF'$ 的面積= ______ .

解答 $5\sqrt{3}$

解析 $\dfrac{(x-2)^2}{4}-\dfrac{(y-4)^2}{5}=1\Rightarrow a^2=4$，$b^2=5$，$\therefore c^2=9\Rightarrow a=2$，$b=\sqrt{5}$， $c=3$ .

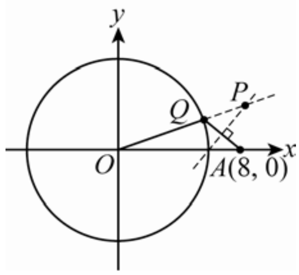
令 $\overline{FP}=m$， $\overline{F'P}=n\Rightarrow |m-n|=2a=4$，

$\triangle PFF'$ 中， $\overline{FF'}^2=\overline{PF}^2+\overline{PF'}^2-2\overline{PF}\times\overline{PF'}\times\cos 60°$

$\Rightarrow 6^2=m^2+n^2-2mn\times\dfrac{1}{2}\Rightarrow m^2+n^2-mn=36\Rightarrow (m-n)^2+mn=36\Rightarrow mn=20$，

$\triangle PFF'$ 面積 $=\dfrac{1}{2}mn\times\sin 60°=\dfrac{\sqrt{3}}{4}mn=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times 20=5\sqrt{3}$ .

30.設圓 $C$ 的圓心爲 $O(0,0)$ 且半徑爲 6 與點 $A(8,0)$，今在圓上找動點 $Q$，若 $\overline{AQ}$ 的中垂線與直線 $OQ$ 相交於 $P$， 求 $P$ 點的軌跡方程式爲__________ .




解答 $\dfrac{(x-4)^2}{9}-\dfrac{y^2}{7}=1$

解析 $|\overline{PA}-\overline{PO}|=|\overline{PQ}-\overline{PO}|=\overline{OQ}=6$（定值），

$2a=6$， $a=3$， $c=4$， $b=\sqrt{7}$ ，

軌跡方程式爲以 $O$ 和 $A$ 爲兩焦點的雙曲線 $\dfrac{(x-4)^2}{9}-\dfrac{(y-0)^2}{7}=1$ .

31.雙曲線 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{5}=1$ 的焦點爲 $F_1, F_2$ 且過 $P$ 點, 若 $\triangle PF_1F_2$ 的周長爲 18, 則 $\overline{PF_1}\times\overline{PF_2}=$ ____________ .

解答 32

解析 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{5}=1\Rightarrow a=2, b=\sqrt{5}, c=\sqrt{4+5}=3$ .

$\because \triangle PF_1F_2$ 的周長爲 18， $\therefore \overline{PF_1}+\overline{PF_2}=18-\overline{F_1F_2}=18-6=12$，

又 $|\overline{PF_1}-\overline{PF_2}|=2a=4\Rightarrow \overline{PF_1}^2-2\overline{PF_1}\times\overline{PF_2}+\overline{PF_2}^2=16$

$\Rightarrow (\overline{PF_1}+\overline{PF_2})^2-4\overline{PF_1}\times\overline{PF_2}=16$， $\therefore 12^2-4\overline{PF_1}\times\overline{PF_2}=16\Rightarrow \overline{PF_1}\times\overline{PF_2}=32$ .

32.設雙曲線 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{k}=1$，$k>0$，其焦點爲 $F_1$，$F_2$，若 $P$ 爲曲線上一點且 $\overline{PF_1}+\overline{PF_2}=12$， $\angle F_1PF_2=60°$，

則 $k=$________ .

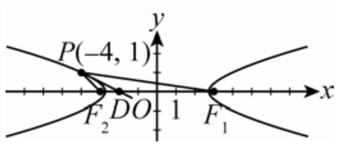
解答 8

解析 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{k}=1\Rightarrow a=2$，$\therefore |\overline{PF_1}-\overline{PF_2}|=2a=4$， 又 $\overline{PF_1}+\overline{PF_2}=12\Rightarrow$ 可設 $\overline{PF_1}=8$ ， $\overline{PF_2}=4$，

在 $\triangle F_1PF_2$ 中，由餘弦定理 $\Rightarrow \overline{F_1F_2}^2=\overline{PF_1}^2+\overline{PF_2}^2-2\times\overline{PF_1}\times\overline{PF_2}\times\cos 60°$

$= 64 + 16 - 2 \times 8 \times 4 \times \dfrac{1}{2} = 48$，$\therefore \overline{F_1F_2} = 4\sqrt{3} \Rightarrow c = 2\sqrt{3}$，$\therefore k = b^2 = c^2 - a^2 = 12 - 4 = 8$ .

33.設 $F_1$ 與 $F_2$ 爲坐標平面上雙曲線 $\Gamma$：$\dfrac{x^2}{8} - y^2 = 1$ 的兩個焦點，且 $P(-4,\ 1)$ 爲 $\Gamma$ 上一點．若 $\angle F_1PF_2$ 的角平分線與 $x$ 軸交於點 $D$，則 $D$ 的 $x$ 坐標爲＿＿＿＿＿＿＿＿＿．




解答 $-2$

解析 $a^2 = 8$，$b^2 = 1 \Rightarrow c^2 = 8 + 1 = 9 \Rightarrow c = 3$ .

又 $\overline{PF_2} = \sqrt{2}$，$\overline{PF_1} = 5\sqrt{2}$，且 $\overline{PD}$ 爲 $\angle F_1PF_2$ 的角平分線，

$\therefore \overline{F_2D}$ ：$\overline{F_1D} = \overline{PF_2}$ ：$\overline{PF_1} = \sqrt{2}$ ：$5\sqrt{2} = 1$ ：$5$，得 $D(-2\,,0)$ .

34.雙曲線 $\dfrac{x^2}{t} - \dfrac{y^2}{2} = 1$ 與橢圓 $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{t^2} = 1$ 有相同焦點，則 $t$ 值爲＿＿＿＿＿＿＿＿＿．

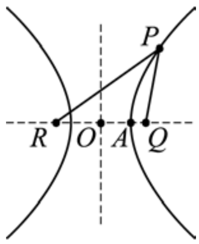
解答 1

解析 雙曲線中，$t > 0$，知開口向左右．

設焦點 $F(c,0)$，則雙曲線中 $c^2 = t + 2$，橢圓中 $c^2 = 4 - t^2$，

$c^2 = t + 2 = 4 - t^2$ 得 $(t+2)(t-1) = 0$，但 $t > 0$，得 $t = 1$ .

35.兩個行星中心點距離爲 10 萬公里，今有彗星 $P$ 的運動軌跡是以兩行星 $Q$，$R$ 的中心點爲焦點的雙曲線一支（如圖），已知 $P$ 與 $Q$，$R$ 的距離分別爲 8 萬公里，14 萬公里，則此彗星與行星的最近距離爲＿＿＿＿＿＿＿＿＿萬公里．

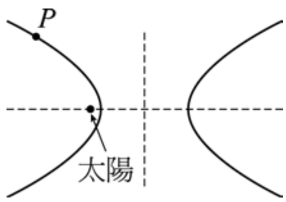



解答 2

解析 由 $\overline{QR} = 10$，知 $c = 5$，又 $|\overline{PR} - \overline{PQ}| = 6$，知 $a = 3$，$b = 4$，

得方程式 $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{16} = 1$，由 $A(3,0)$，$Q(5,0)$，知最近距離 $\overline{AQ} = 2$（萬公里）.

36.有一幅雙曲線型的彗星軌道圖，如圖，在圖中心左方 7 公分處爲軌道之頂點，9 公分處是太陽爲軌道之焦點．若彗星 $P$ 的位置在通過中心的水平線上方 16 公分，試求其與太陽在圖上的距離爲＿＿＿＿＿＿＿＿＿公分．




解答 20

解析 設橢圓的方程式爲 $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$，因頂點爲 $F(-7,0)$，得 $a^2 = 49$，

太陽在焦點 $(-9,0)$，知 $c^2 = 81$，$b^2 = 32$，得方程式爲 $\dfrac{x^2}{49} - \dfrac{y^2}{32} = 1$，

$y = 16$ 代入方程式得 $x = -21$，即彗星在 $(-21,16)$，距離 $\sqrt{(-21+9)^2 + (16-0)^2} = 20$（公分）.