高雄市明誠中學 高二數學平時測驗 日期：101.06.05					
範圍	4-2 橢圓	班級	二年____班	姓名	
		座號			

一、填充題　(每題 10 分)

1.橢圓 $4x^2+9y^2+16x-18y-11=0$ 的

(1)中心坐標爲____________．(2)長軸長 $=$ ____________．(3)短軸長 $=$ ____________．

解答 (1)$(-2，1)$;(2)6;(3)4

解析 $4x^2+9y^2+16x-18y-11=0 \Leftrightarrow 4(x+2)^2+9(y-1)^2=36 \Leftrightarrow \dfrac{(x+2)^2}{9}+\dfrac{(y-1)^2}{4}=1$，

x 方向的橢圓，且中心$(-2，1)$，長軸長 $=6$，短軸長 $=4$．

2.橢圓 $3x^2+4y^2=12$ 的焦點坐標爲___________．

解答 $(1，0)$與$(-1，0)$

解析 橢圓 $3x^2+4y^2=12 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$，$a=2$，$b=\sqrt{3}$，$c=1$，

x 方向的橢圓，中心$(0，0)$，焦點坐標$(1，0)$，$(-1，0)$．

3.已知一橢圓過點$(-1，\dfrac{\sqrt{3}}{2})$，且兩焦點爲$(\sqrt{3}，0)$，$(-\sqrt{3}，0)$，則

(1)此橢圓的方程式爲____________．(2)長軸長 $=$ ____________．

解答 (1)$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{1}=1$;(2)4

解析 SOL 一

橢圓兩焦點爲$(\sqrt{3}，0)$，$(-\sqrt{3}，0)$，其中點$(0，0)$就是橢圓中心，

設此橢圓方程式爲 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，又點$(-1，\dfrac{\sqrt{3}}{2})$在橢圓上，

$a^2-b^2=3$ 且 $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{3}{4b^2}=1$，因此 $\begin{cases} a^2=b^2+3 \\ 4b^2+3a^2=4a^2b^2 \end{cases}$，可得 $4b^2+3(b^2+3)=4(b^2+3)b^2$，

即 $4b^4+5b^2-9=0$，可得 $b^2=1$，$a^2=4$，橢圓方程式 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{1}=1$，長軸長 $=2a=4$．

SOL 二

$P(-1，\dfrac{\sqrt{3}}{2})$，且兩焦點爲 $F_1(\sqrt{3}，0)$，$F_2(-\sqrt{3}，0)$

橢圓 $\Rightarrow \overline{PF_1}+\overline{PF_2}=2a$，即 $\sqrt{(-1-\sqrt{3})^2+(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-0)^2}+\sqrt{(-1+\sqrt{3})^2+(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-0)^2}=2a$

$$\Rightarrow \frac{4+\sqrt{3}}{2}+\frac{4-\sqrt{3}}{2}=2a，\begin{cases} a=2 \\ b=\sqrt{a^2-c^2}=1 \end{cases}$$

橢圓方程式 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{1}=1$，長軸長 $=2a=4$．

5.橢圓$\sqrt{(x+4)^2+(y-1)^2}+\sqrt{(x-4)^2+(y-1)^2}=10$，試求：

(1)長軸長 $=$____________． (2)在 y 軸上之投影長 $=$____________．

解答 (1)10;(2) 6

解析 $F'(-4，1)$，$F(4，1) \Rightarrow$ 中心$(0，1)$，$\therefore c=4$，$a=5 \Rightarrow b=\sqrt{5^2-4^2}=3$，

x 方向的橢圓，故長軸長 $=2a=10$，在 y 軸上之投影長 $=2b=6$．

6.橢圓 $9x^2+4y^2+54x-16y-47=0$，試求：

(1)焦點坐標爲____________． (2)內接正方形面積爲____________．

解答 (1) $(-3，2\pm 2\sqrt{5})$;(2) $\dfrac{576}{13}$

解析 $9x^2+4y^2+54x-16y-47=0 \quad \Rightarrow 9(x+3)^2+4(y-2)^2=144 \Rightarrow \dfrac{(x+3)^2}{16}+\dfrac{(y-2)^2}{36}=1$，

y 方向的橢圓，中心$(-3，2)$，$a=6$，$b=4$，又 $c^2=a^2-b^2=20 \Rightarrow c=2\sqrt{5}$，

$\therefore$焦點$(-3，2\pm 2\sqrt{5})$，又內接正方形面積爲 $4(\dfrac{a^2b^2}{a^2+b^2})=\dfrac{4\times 36\times 16}{36+16}=\dfrac{576}{13}$．

7.橢圓中心(2，1)，長軸在直線 $x=2$ 上，過此橢圓長軸之一頂點的二個焦半徑爲 2 與 8，試求：

(1)此橢圓之方程式爲____________． (2)此橢圓之二焦點爲____________．

解答 (1) $\dfrac{(x-2)^2}{16}+\dfrac{(y-1)^2}{25}=1$;(2) $(2，-2)$，$(2，4)$

解析 $\begin{cases} a+c=8 \\ a-c=2 \end{cases} \Rightarrow a=5$，$c=3$，$\therefore b=4$，$\therefore$橢圓 Γ：$\dfrac{(x-2)^2}{16}+\dfrac{(y-1)^2}{25}=1$，

二焦點爲$(2，-2)$，$(2，4)$．

8.設 $x^2+2y^2-2x+8y+k=0$，試求：

(1)表一點時，此點坐標爲____________． (2)表一橢圓時，k 值之範圍爲____________．

解答 (1) $(1，-2)$;(2) $k<9$

解析 $x^2+2y^2-2x+8y+k=0 \Rightarrow (x^2-2x+1)+2(y^2+4y+4)=-k+9$

$\Rightarrow (x-1)^2+2(y+2)^2=-k+9$，$\therefore k=9$ 時，表點$(1，-2)$；$k<9$ 時，表一橢圓．

9.設 $\dfrac{(x+1)^2}{t+1}+\dfrac{(y+1)^2}{3-t}=1$ 表長軸在直線 $y+1=0$ 上之橢圓，則 t 之範圍爲____________．

解答 $1<t<3$

解析 長軸在直線 $y+1=0$ 上之橢圓 $\Leftrightarrow \begin{cases} a^2=t+1 \\ b^2=3-t \end{cases} \Leftrightarrow t+1>3-t>0 \Rightarrow 1<t<3$．

10.與橢圓 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{(y-1)^2}{4}=1$ 共焦點且過點(3，3)之橢圓方程式爲____________．

解答 $\dfrac{x^2}{15}+\dfrac{(y-1)^2}{10}=1$

解析

設橢圓 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{(y-1)^2}{b^2}=1$，(3, 3) 代入，得 $\dfrac{9}{a^2}+\dfrac{4}{b^2}=1$……①，且 $c^2=a^2-b^2=5$……②，

解①②得 $b^2=10$，$a^2=15$，∴ $\dfrac{x^2}{15}+\dfrac{(y-1)^2}{10}=1$．

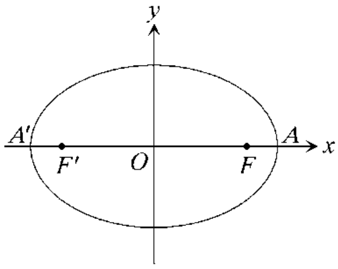
11.若有一動點 $P(x，y)$到 $A(3，4)$，$B(3，12)$兩點距離的和恆爲 10，則
(1) $P(x，y)$點的圖形軌跡爲__________（拋物線、雙曲線⋯）. (2)此圖形方程式爲__________．

解答 (1)橢圓;(2) $\dfrac{(x-3)^2}{9}+\dfrac{(y-8)^2}{25}=1$

解析 動點 $P(x, y)$ 到 $A(3，4)$，$B(3，12)$兩點距離的和恆爲 10，
由橢圓的定義知：此動點的圖形軌跡爲橢圓，
y 方向的橢圓，中心$(3，\dfrac{4+12}{2})=(3，8)$，得 $c=4$，$2a=10$，$a=5\Rightarrow b=3$，

∴橢圓方程式爲 $\dfrac{(x-3)^2}{9}+\dfrac{(y-8)^2}{25}=1$．

12.如圖，橢圓的兩焦點爲 F，F'，若 $\overline{AF}=2$，$\overline{AF'}=14$，則
(1)兩焦點 F，F'的坐標爲__________．(2)橢圓的方程式爲__________．



解答 (1) $F(6，0)$，$F'(-6，0)$;　　(2) $\dfrac{x^2}{64}+\dfrac{y^2}{28}=1$

解析 $\overline{AF}=2$，$\overline{AF'}=14\Rightarrow\begin{cases}a+c=14\\a-c=2\end{cases}\Rightarrow\overline{FF'}=2c=12$，

∴$c=6$，$a=2+6=8\Rightarrow b^2=8^2-6^2=28$，

∴焦點坐標 $F(6，0)$，$F'(-6，0)$，橢圓方程式$=\dfrac{x^2}{64}+\dfrac{y^2}{28}=1$．

13.若一橢圓的兩焦點坐標分別爲$(-2，5)$，$(-2，-3)$；且經過點$(-5，1)$，則
(1)此橢圓之方程式爲__________．(2)其短軸長爲__________．

解答 (1) $\dfrac{(x+2)^2}{9}+\dfrac{(y-1)^2}{25}=1$;(2)6

解析 橢圓 Γ 兩焦點 $F(-2，5)$，$F'(-2，-3)$，∴中心$(-2，1)$，$2c=\overline{FF'}=8$，其長軸垂直 x 軸，

設 Γ：$\dfrac{(x+2)^2}{b^2}+\dfrac{(y-1)^2}{a^2}=1$，$a^2=b^2+c^2=b^2+16$，

Γ 過$(-5，1)\Rightarrow\dfrac{9}{b^2}+\dfrac{0}{a^2}=1$，∴$b^2=9$，又 $c=4$，∴$a^2=b^2+c^2=9+16=25\Rightarrow a=5$，

∴Γ：$\dfrac{(x+2)^2}{9}+\dfrac{(y-1)^2}{25}=1$，短軸長 $=2b=2\times3=6$．

14.已知一橢圓的兩焦點$(5，1)$，$(-1，1)$，長軸長爲 $2\sqrt{13}$，則此橢圓方程式爲__________．

解答 $\dfrac{(x-2)^2}{13}+\dfrac{(y-1)^2}{4}=1$

解析 橢圓兩焦點$(5，1)$，$(-1，1)$，則中心$(2，1)$，$c=\sqrt{(5-2)^2+(1-1)^2}=3$，

長軸長 $2a=2\,6\sqrt{5}\Rightarrow a=\sqrt{13}$，∴$b^2=a^2-c^2=13-9=4$，

$\therefore$橢圓方程式為$\dfrac{(x-2)^2}{13}+\dfrac{(y-1)^2}{4}=1$．

15.橢圓短軸兩端點坐標為$(-1，1)$，$(3，1)$，焦點間的距離為$2\sqrt{5}$，則橢圓方程式為____________．

解答 $\dfrac{(x-1)^2}{4}+\dfrac{(y-1)^2}{9}=1$

解析 短軸端點$(-1，1)$，$(3，1)\Rightarrow$短軸在直線$y=1$上，而中心$(1，1)$，

y方向的橢圓，$\therefore$長軸在$x=1$上，

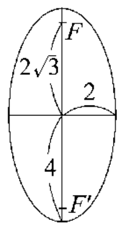
又$2b=3-(-1)=4\Rightarrow b=2$，又$2c=2\sqrt{5}$，$\therefore c=\sqrt{5}\Rightarrow a^2=b^2+c^2=4+5=9$，

故橢圓方程式為$\dfrac{(x-1)^2}{4}+\dfrac{(y-1)^2}{9}=1$．

16.橢圓$4x^2+y^2+8x-4y-8=0$的

(1)中心坐標為_________．(2)焦點坐標為________．(3)橢圓上任一點到兩焦點的距離和 ＝________．

解答 (1)$(-1，2)$;(2)$(-1，2\pm2\sqrt{3})$;(3) 8



解析 $4x^2+y^2+8x-4y-8=0\Rightarrow 4(x+1)^2+(y-2)^2=16\Rightarrow\dfrac{(x+1)^2}{4}+\dfrac{(y-2)^2}{16}=1$，

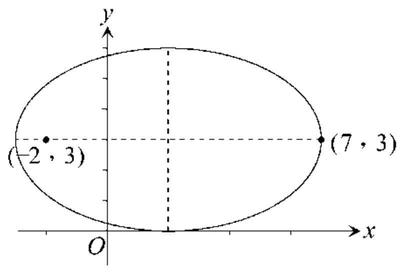
$b^2=4$，$a^2=16\Rightarrow c^2=a^2-b^2=12\Rightarrow a=4$，$b=2$，$c=2\sqrt{3}$，

(1)中心$(-1，2)$．(2)焦點$(h，k\pm c)=(-1，2\pm2\sqrt{3})$．

(3)令橢圓上任一點為P，則$\overline{PF}+\overline{PF'}=2a=8$．

17.已知一橢圓之一焦點為$(-2,3)$,一長軸頂點為$(7,3)$,且短軸長為6,則此橢圓方程式為___________．

解答 $\dfrac{(x-2)^2}{25}+\dfrac{(y-3)^2}{9}=1$



解析 $2b=6$，$b=3$，$b^2=a^2-c^2\Rightarrow 9=(a+c)(a-c)$，

若$a-c=9$得$a+c=1$（不合），

所以$a-c=1$，$a+c=9\Rightarrow a=5$，$c=4$，

設所求為$\dfrac{(x-h)^2}{a^2}+\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1$，

則$(h，k)=(7-a，3)=(7-5，3)=(2，3)$，所求為$\dfrac{(x-2)^2}{5^2}+\dfrac{(y-3)^2}{3^2}=1$．

18.設H：$\dfrac{x^2}{16-t}+\dfrac{y^2}{t+2}=1$（$t\in\mathbb{R}$）表兩焦點在$y$軸之橢圓，則$t$值範圍為____________．

解答 $7<t<16$

解析 所求為y方向的橢圓$\Rightarrow\begin{cases}16-t>0\\ t+2>0\\ 16-t<t+2\end{cases}\Rightarrow 7<t<16$．

19.坐標平面上一個以$(0，2)$，$(6，2)$為兩焦點，10為長軸長的橢圓，試求

(1)橢圓方程式為____________．　(2)此橢圓在短軸上的兩頂點坐標分別為____________．(有兩解）

解答 (1)$\dfrac{(x-3)^2}{25}+\dfrac{(y-2)^2}{16}=1$;(2)$(3，6)$與$(3，-2)$

解析 $F_1(0，2)$，$F_2(6，2)\Rightarrow\overline{F_1F_2}=2c=6$，$\therefore c=3$且為$x$方向的橢圓，

中心$(\frac{0+6}{2}，\frac{2+2}{2})=(3，2)$，$2a=10\Rightarrow a=5$，$\therefore b=\sqrt{a^2-c^2}=4$，

$\therefore \frac{(x-3)^2}{25}+\frac{(y-2)^2}{16}=1$，短軸頂點$(3，2\pm 4)$，即$(3，6)$，$(3，-2)$.

20.若橢圓Γ_1：$\frac{x^2}{90}+\frac{y^2}{15}=1$與$\Gamma_2$：$\frac{x^2}{a^2-5}+\frac{y^2}{2a}=1$焦點相同，則

(1) Γ_2的短軸長 $=$____________ . (2)設點$P(\sqrt{19}，t)$在Γ_2上且$t>0$，則$t=$____________ .

解答 (1)$4\sqrt{5}$;(2)4

解析 Γ_1：$\frac{x^2}{90}+\frac{y^2}{15}=1$與$\Gamma_2$：$\frac{x^2}{a^2-5}+\frac{y^2}{2a}=1$焦點相同，則相同$c$

$\Rightarrow c^2=a^2-b^2$，即$(a^2-5)-2a=90-15$，

可得$a=10$或$a=-8$（但$a>0$），所以Γ_2：$\frac{x^2}{95}+\frac{y^2}{20}=1$，短軸長 $=2\sqrt{20}=4\sqrt{5}$，

當點$P(\sqrt{19}，t)$在Γ_2上時，$\frac{19}{95}+\frac{t^2}{20}=1$，即$t^2=20(\frac{4}{5})=16$，$t=\pm 4$，又$t>0$，所以$t=4$.

21.若一橢圓的兩焦點在$(1，3)$，$(1，-5)$，長軸長爲12，則橢圓之方程式爲____________ .

解答 $\frac{(x-1)^2}{20}+\frac{(y+1)^2}{36}=1$

解析 已知焦點$F(1，3)$，$F'(1，-5)$，則y方向的橢圓，中心爲$(1，-1)$，$c=4$，

又$2a=12$，$\therefore a=6$，則$b^2=a^2-c^2=36-16=20$，

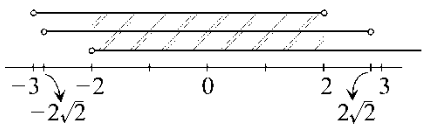
故橢圓之方程式爲$\frac{(x-1)^2}{20}+\frac{(y+1)^2}{36}=1$.

22.方程式$\frac{x^2}{k+2}+\frac{y^2}{8-k^2}=1$表示長軸在$y$軸上之橢圓，則$k$之範圍爲____________ .

解答 $-2<k<2$

解析 方程式$\frac{x^2}{k+2}+\frac{y^2}{8-k^2}=1$表示長軸在$y$軸上之橢圓時，

$$\begin{cases} k+2>0\Rightarrow k>-2 \\ 8-k^2>0\Rightarrow -2\sqrt{2}<k<2\sqrt{2} \\ k+2<8-k^2\Rightarrow k^2+k-6<0\Rightarrow (k+3)(k-2)<0\Rightarrow -3<k<2 \end{cases} \qquad \therefore -2<k<2 .$$

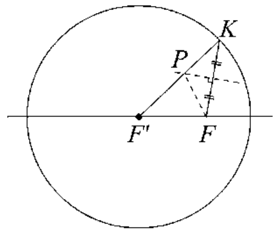


23.設二定點$F(5，2)$，$F'(-1，2)$，以F'爲中心，10單位長爲半徑畫圓，令K爲此圓上的動點，P爲

$\overline{KF}$中垂線與直線$\overleftrightarrow{KF'}$的交點，則K在圓上轉一周時，P點的軌跡方程式爲____________ .

解答 $\frac{(x-2)^2}{25}+\frac{(y-2)^2}{16}=1$

解析 $\because \overline{FF'}=6<10$，$\therefore F$ 在圓內，又因爲 P 爲 $\overline{KF}$ 中垂線與 $\overleftrightarrow{KF'}$ 之交點，



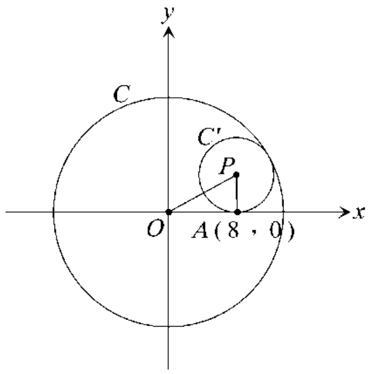
$\therefore \overline{PF}=\overline{PK}\Rightarrow \overline{PF}+\overline{PF'}=\overline{PK}+\overline{PF'}=\overline{F'K}=10$，

軌跡爲以 F，F'爲二焦點，長軸長 $=10$ 的橢圓，

中心$(\dfrac{-1+5}{2}$，$\dfrac{2+2}{2})=(2，2)$，

$a=5$，$c=3\Rightarrow b=4$，故方程式爲$\dfrac{(x-2)^2}{25}+\dfrac{(y-2)^2}{16}=1$.

24.圓 $C：x^2+y^2=100$，$A(8，0)$，動圓 C'恆過 $A(8，0)$且與圓 C 相切，若圓 C'之圓心 P，試求 P 之軌跡 Γ 之方程式____________ .



解答 $\dfrac{(x-4)^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$

解析 $C：x^2+y^2=10^2$，圓心爲 $O(0，0)$，半徑$=10$，圓 C'之圓心爲 P，半徑爲 r，

又與圓 C 相內切，$\therefore$連心距$\overline{PO}=10-r$，則$\overline{PA}+\overline{PO}=r+(10-r)=10>\overline{AO}=8$，

所以 P 之軌跡爲以 $A(8，0)$，$O(0，0)$爲兩焦點，長軸長爲 10 之橢圓，

即 P 之軌跡爲$\dfrac{(x-4)^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$.

25.若線段$\overline{AB}$之長爲 5，其上一點 C 使$\overline{AC}：\overline{CB}=3：2$，當 A 在 x 軸上移動，B 在 y 軸上移動，則 (1)動點 C 所形成的圖形方程式爲___________ . (2)此圖形上相異兩點距離的最大值 $=$___________ .

解答 (1)$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$;(2)6

解析 如下圖，設 $A(t，0)$，$B(0，s)$，$C(x，y)$，因爲$\overline{AC}：\overline{CB}=3：2$，所以$x=\dfrac{2}{5}t$，$y=\dfrac{3}{5}s$，

即$t=\dfrac{5}{2}x$，$s=\dfrac{5}{3}y$，又$\overline{AB}=5=\sqrt{t^2+s^2}$，所以$t^2+s^2=25$，亦即$\dfrac{25}{4}x^2+\dfrac{25}{9}y^2=25$，

所以點 C 的圖形爲方程式$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 的圖形，

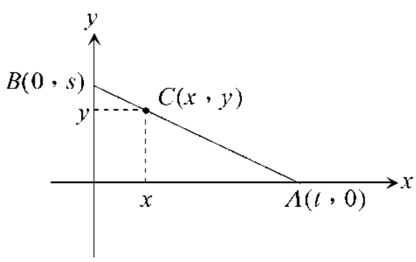
此圖形爲橢圓，橢圓上相異兩點的最大距離爲長軸的長 $=6$.

26.橢圓 Γ：$\dfrac{x^2}{t-4}+\dfrac{y^2}{t-1}=1$上一點$P(\dfrac{1}{2}，\sqrt{3})$到兩焦點 F，F'的距離和$\overline{PF}+\overline{PF'}$是____________ .

解答 4

解析 點$P(\dfrac{1}{2},\sqrt{3})$在橢圓$\dfrac{x^2}{t-4}+\dfrac{y^2}{t-1}=1$上，

$\therefore t-4>0$，$t-1>0\Rightarrow t>4$



$$\Rightarrow \frac{(\frac{1}{2})^2}{t-4}+\frac{(\sqrt{3})^2}{t-1}=1 \Rightarrow \frac{t-1+12(t-4)}{4(t-4)(t-1)}=1 \Rightarrow t-1+12t-48=4t^2-20t+16$$

$\Rightarrow 4t^2-33t+65=0 \Rightarrow (t-5)(4t-13)=0 \Rightarrow t=5$ 或 $\frac{13}{4}$（不合），

$\therefore$原方程式爲 $\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{4}=1$，則點 P 到兩焦點 F，F'的距離和 $=\overline{PF}+\overline{PF'}=2a=2\times 2=4$．