高雄市明誠中學 高二數學平時測驗 日期：101.05.29					
範圍	4-1 抛物線	班級	二年____班	姓名	
		座號			

一、填充題 (每題 10 分)

1.抛物線$(x-3)^2=8(y+1)$的

(1)頂點坐標爲____________．(2)焦點坐標爲____________．(3)準線方程式爲____________．

解答 (1)(3，-1);(2)(3，1);(3)$y=-3$

解析 $(x-3)^2=4\times 2(y+1)$，$\therefore c=2>0$，頂點(3，-1)，爲開口向上的抛物線

焦點(3，$-1+2$) = (3，1)，準線 $y+1=-2\Rightarrow y=-3$．

2.準線是直線 $x=-5$，焦點在 F(3，0)的抛物線方程式爲____________．

解答 $y^2=16(x+1)$

解析 準線 $x=-5$，焦點 F(3，0)，則對稱軸 $y=0$，頂點($\dfrac{-5+3}{2}$，0) = (-1，0)，

$c=4$，開口向右的抛物線，$\therefore$方程式爲 $y^2=16(x+1)$．

3.試求抛物線 Γ：$y^2=16x$ 的焦點到準線距離____________．

解答 8

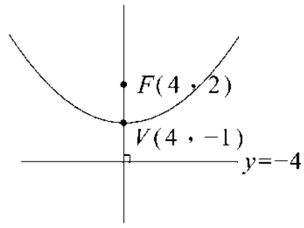
解析 抛物線 Γ：$y^2=16x$，$\because 4c=16$，$\therefore c=4$，故焦點到準線的距離 $=|2c|=8$．

4.一抛物線的頂點(4，-1)，焦點(4，2)，則抛物線之

(1)準線方程式爲____________．(2)抛物線方程式爲____________．

解答 (1)$y=-4$;(2)$(x-4)^2=12(y+1)$

解析 頂點 V(4，-1)，焦點 F(4，2)，$c=\overline{VF}=3$，開口向上，



準線 $y=-1-3\Rightarrow y=-4$，

開口向上，$c=3$，$4c=12$，

軸爲 $x-4=0$，$\therefore$抛物線方程式爲$(x-4)^2=12(y+1)$．

5.試求抛物線 $x^2-2x+4y-5=0$ 的

(1)對稱軸方程式爲____________．(2)頂點坐標爲____________．(3)焦點坐標爲____________．

(4)準線方程式爲____________． (5)焦距 = ____________．

解答 (1)$x-1=0$;(2)(1，$\dfrac{3}{2}$);(3)(1，$\dfrac{1}{2}$);(4)$y=\dfrac{5}{2}$;(5)1

解析 $x^2-2x+4y-5=0$ 配方$\Rightarrow(x-1)^2=-4y+6\Rightarrow(x-1)^2=-4(y-\dfrac{3}{2})$．開口向下

(1)軸爲 $x-1=0$． (2)頂點(1，$\dfrac{3}{2}$)．(3) $4c=-4\Rightarrow c=-1$，焦點(1，$\dfrac{3}{2}-1$) = (1，$\dfrac{1}{2}$)．

(4)準線 $y=\dfrac{3}{2}-(-1)\Rightarrow y=\dfrac{5}{2}$． (5)焦距 $=|c|=|-1|=1$．

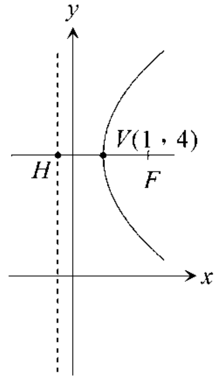
6.設抛物線 Γ 的頂點爲(1，4)，準線爲 $2x+1=0$，則

(1) Γ 的方程式爲____________．

(2)若抛物線 Γ'與 Γ 對稱於 y 軸，則 Γ'的方程式爲____________．

解答 (1)$(y-4)^2=6(x-1)$;(2)$(y-4)^2=-6(x+1)$

解析 以(1，4)爲頂點，L：$2x+1=0$ 爲準線的抛物線 Γ，如圖，

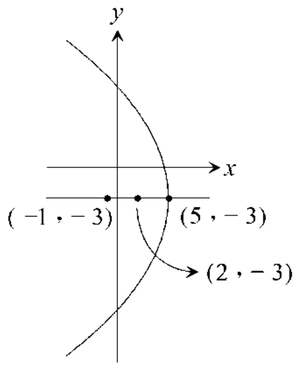


對稱軸與準線的交點 $H(\frac{-1}{2}，4)$，焦點$(1+\frac{3}{2}，4)=(\frac{5}{2}，4)$，$c=\frac{5}{2}-1=\frac{3}{2}$，

抛物線方程式為$(y-4)^2=4\times\frac{3}{2}(x-1)$，即 Γ：$(y-4)^2=6(x-1)$，

抛物線 Γ'與 Γ 對稱於 y 軸，則 Γ'頂點$(-1，4)$，開口朝左，Γ'方程式$(y-4)^2=-6(x+1)$．

7.已知 $A(5，-3)$，$B(-1，-3)$為平面上兩點，則以 A 為頂點，B 為焦點的抛物線方程式為____________．



解答　$(y+3)^2=-24(x-5)$

解析　抛物線 Γ 以 $A(5，-3)$為頂點，$B(-1，-3)$為焦點，如下圖，
則 $c=-6$，Γ 的方程式為$(y+3)^2=4(-6)(x-5)$，
即$(y+3)^2=-24(x-5)$．

8.抛物線 Γ 過$(1，1)$，$(3，2)$，$(3，-1)$三點且對稱軸平行 x 軸，則
(1) Γ 之方程式為____________．　(2) Γ 之焦點為____________．

解答　(1) $x=y^2-y+1$;(2) $(1，\frac{1}{2})$

解析　設抛物線 Γ：$x=ay^2+by+c$，將$(1，1)$，$(3，2)$，$(3，-1)$代入，

$$\therefore\begin{cases}1=a+b+c\\3=4a+2b+c\\3=a-b+c\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a+c=2\\b=-1\\4a+c=5\end{cases}\Rightarrow a=1，b=-1，c=1，$$

$\therefore x=y^2-y+1$ 配方$\Rightarrow(y-\frac{1}{2})^2=4\times\frac{1}{4}(x-\frac{3}{4})$，$\therefore$頂點 $V(\frac{3}{4}，\frac{1}{2})$，故焦點 $F(1，\frac{1}{2})$．

9.與 $y^2-4x+6y+5=0$ 共軸、共焦點且過$(3，1)$之抛物線方程式為____________．

解答　$(y+3)^2=-16(x-4)$或$(y+3)^2=4(x+1)$

解析　$y^2-4x+6y+5=0\Rightarrow(y+3)^2=4\times1\times(x+1)$，
$\therefore$頂點為$(-1，-3)$，$c=1\Rightarrow$焦點為$(0，-3)$且對稱軸為 $y+3=0$，
設所求抛物線 Γ 頂點為 $(0-k,-3)$，則所求 Γ：$(y+3)^2=4k(x+k)$，
$(3，1)$代入，$16=4k(3+k)\Rightarrow k^2+3k-4=0\Rightarrow k=1$ 或 -4，
$(y+3)^2=-16(x-4)$ 或 $(y+3)^2=4(x+1)$．

10.抛物線 Γ 對稱於 $x-1=0$ 且過二點$(2，3)$，$(-1，6)$，則 Γ 的方程式為____________．

解答　$(x-1)^2=y-2$

解析　抛物線 Γ 對稱軸 $x-1=0\Rightarrow$頂點$(1,k)$，設 Γ：$(x-1)^2=4c(y-k)$，

$(2，3)$，$(-1，6)$ 代入$\Rightarrow\begin{cases}1=4c(3-k)\\4=4c(6-k)\end{cases}$，兩式相除

$$\Rightarrow\frac{1}{4}=\frac{3-k}{6-k},12-4k=6-k,\quad\begin{cases}k=2\\c=\frac{1}{4}\end{cases}，故(x-1)^2=y-2．$$

11.焦點為$(1，-1)$，準線垂直於 y 軸，焦距為 2 之抛物線方程式為____________．

解答　$(x-1)^2=-8(y-1)$或$(x-1)^2=8(y+3)$

解析 焦距 $=|c|=2\Rightarrow c=\pm 2$，

$\therefore c=-2$ 時，頂點 $V(1，1)\Rightarrow\ (x-1)^2=-8(y-1)$

$c=2$ 時，頂點 $V(1，-3)\Rightarrow\ (x-1)^2=8(y+3)$．

12.抛物線 $y=x^2-mx+m$ 與 x 軸交於 A，B 兩點，若 $\overline{AB}=\sqrt{5}$，則 $m=$____________．

解答 -1 或 5

解析 $y=x^2-mx+m$ 交 x 軸於 $A(\alpha，0)$，$B(\beta，0)$，則 $\alpha+\beta=m$，$\alpha\beta=m$

$\Rightarrow(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=m^2-4m$，$\because\overline{AB}=|\alpha-\beta|=\sqrt{5}$，

$\therefore m^2-4m=5\Rightarrow(m+1)(m-5)=0\Rightarrow m=-1$ 或 5．

13.根據下列條件，求出抛物線之方程式：

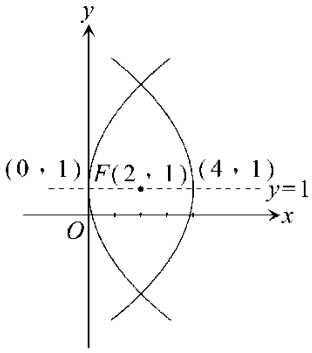
(1)焦點(2，1)，準線平行於 y 軸，焦距爲 2：____________．

(2)頂點(0，0)，焦點在直線 $x-y=2$ 上，對稱軸爲 y 軸：____________．

解答 (1) $(y-1)^2=8x$ 或$(y-1)^2=-8(x-4)$;(2) $x^2=-8y$

解析 (1)焦點 $F(2,1)$，準線平行於 y 軸 $\Rightarrow$ 軸的方程式爲 $y=1$（軸垂直 y 軸），

$|c|=2\Rightarrow c=\pm 2$．



① $c=2$ 時，抛物線開口向右，頂點在焦點 $F(2，1)$的左方，

頂點坐標爲(0，1)，抛物線方程式爲$(y-1)^2=8x$．

② $c=-2$ 時，抛物線開口向左，頂點在焦點 $F(2，1)$的右方，

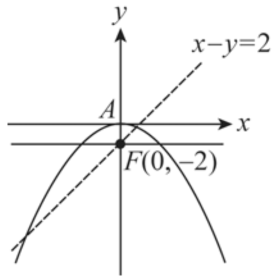
頂點坐標爲(4，1)，抛物線方程式爲$(y-1)^2=-8(x-4)$，

$\therefore$抛物線方程式爲$(y-1)^2=8x$ 或$(y-1)^2=-8(x-4)$．

(2)焦點在直線 $x-y=2$ 上，也在對稱軸 $x=0$ 上，$\therefore$焦點坐標爲 $F(0，-2)$，

頂點 $A(0，0)$，$\therefore|c|=\overline{AF}=2$，又抛物線開口向下$\Rightarrow c=-2$，

故抛物線方程式爲 $x^2=-8y$．



14.若兩抛物線 $y=2x^2+(2a-4)x+b$ 與 $y=3x^2+6x-9$ 的頂點重合，則

(1)數對$(a，b)=$____________．(2)兩抛物線的對稱軸方程式爲____________．

解答 (1)(4，-10);(2)$x=-1$

解析 配方 $y=2x^2+(2a-4)x+b=2(x+\dfrac{a-2}{2})^2+b-\dfrac{(a-2)^2}{2}$，

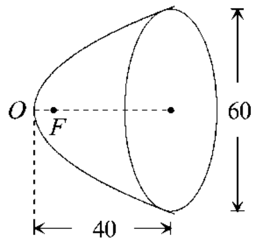
又 $y=3x^2+6x-9=3(x+1)^2-12$，

兩抛物線的頂點分別爲$(\dfrac{-(a-2)}{2}，b-\dfrac{(a-2)^2}{2})$與$(-1，-12)$，

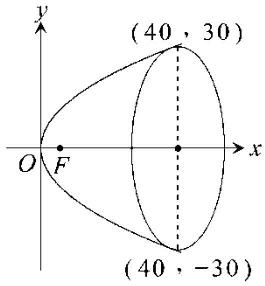
當兩頂點重合時，$\begin{cases}\dfrac{-(a-2)}{2}=-1\\ b-\dfrac{(a-2)^2}{2}=-12\end{cases}$，即 $a=4$，$b=-12+2=-10$，

兩抛物線的對稱軸也重合，其方程式爲 $x=-1$，所以，$(a，b)=(4，-10)$，對稱軸 $x=-1$．

15.探照燈的外殼是抛物線繞它的對稱軸旋轉一周所形成的曲面，如圖所示．已知燈口處的直徑是 60 公分，燈的深度是 40 公分，則焦距（焦點與頂點的距離）是____________公分．



解答 $\frac{45}{8}$

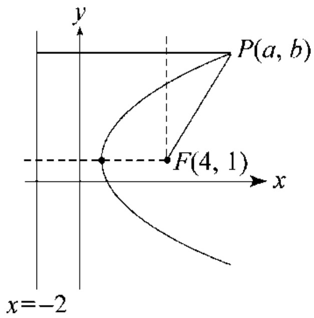


解析 建立坐標系，頂點 O 爲原點，設抛物線方程式 $y^2=4cx$，

過$(40, 30)$與$(40, -30)\Rightarrow (30)^2=4c(40)\Rightarrow c=\frac{900}{160}=\frac{45}{8}$，即焦距 $=\frac{45}{8}$.

16.設 F 爲抛物線$(y-1)^2=12(x-1)$的焦點，若 $P(a，b)$在抛物線上，且 $\overline{PF}=9$，

則 $a=$____________ .



解答 7

解析

抛物線$(y-1)^2=12(x-1)$，頂點(1，1)，$4c=12$，$c=3$，

$\therefore$開口向右，焦點$F(4，1)$，準線L：$x=-2$，

$\because P$在抛物線上且$\overline{PF}=9$，

$\therefore \overline{PF}=d(P，L)\Rightarrow 9=a-(-2)\Rightarrow a=7$.

17.設有一抛物線 $\Gamma：y^2=8x$，若與 Γ 共軸、共焦點，通過點$(1，2\sqrt{6})$的抛物線爲 $y^2=ax+b$，$a>0$，

則$(a，b)=$____________ .

解答 $(12，12)$

解析 與$(y-0)^2=4\times 2(x-0)$共軸、共焦點之抛物線，方程式可設爲 $y^2=4(2-t)(x-t)$ $t\in\mathbb{R}$，

$\because$過$(1，2\sqrt{6})\Rightarrow 24=4(2-t)(1-t)\Rightarrow t^2-3t-4=0\Rightarrow t=4，-1$，

$t=4\Rightarrow y^2=-8(x-4)=-8x+32$，$a<0$ 不合，

$t=-1\Rightarrow y^2=12(x+1)=12x+12$，$\therefore a=12$，$b=12$.

18.設抛物線 $y=mx^2+3(m-4)x-9$ 交 x 軸於相異二點 P，Q，則

(1)當 $\overline{PQ}$ 長最小時，m 的值爲____________ . (2)又 $\overline{PQ}$ 之最小值爲____________ .

解答 (1)$m=8$;(2)最小值$\frac{3\sqrt{3}}{2}$

解析 $y=mx^2+3(m-4)x-9$ 的圖形與 x 軸交於相異兩點 P，Q

$\Leftrightarrow D=9(m-4)^2-4m(-9)>0\Leftrightarrow m^2-4m+16>0\Leftrightarrow (m-2)^2+12>0$ 恆成立，

設 $P(\alpha，0)$，$Q(\beta，0)$，則 $mx^2+3(m-4)x-9=0$ 的二根 α，β

$\Rightarrow \alpha+\beta=-\frac{3(m-4)}{m}$，$\alpha\beta=\frac{-9}{m}$，

$\therefore \overline{PQ}^2=|\alpha-\beta|^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=\frac{9(m-4)^2}{m^2}+\frac{36}{m}=9(\frac{16}{m^2}-\frac{4}{m}+1)=9[(\frac{4}{m}-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}]$，

當 $\frac{4}{m}=\frac{1}{2}$，即 $m=8$ 時，$\overline{PQ}^2$ 最小值爲 $9\times\frac{3}{4}\Rightarrow \overline{PQ}$ 最小值 $=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

19.二抛物線 $y=x^2-3x$ 與 $y=\frac{1}{2}x^2+ax+b$ 有相同的頂點，則數對$(a, b)=$____________ .

解答 $(-\frac{3}{2}，-\frac{9}{8})$

解析 $y=x^2-3x=(x-\frac{3}{2})^2-\frac{9}{4}\Rightarrow (x-\frac{3}{2})^2=y+\frac{9}{4}$，頂點$(\frac{3}{2}，-\frac{9}{4})$，

$y=\dfrac{1}{2}x^2+ax+b=\dfrac{1}{2}(x+a)^2+b-\dfrac{a^2}{2}$，頂點$(-a，b-\dfrac{a^2}{2})$，已知二頂點爲同一點，

$\therefore(-a，b-\dfrac{a^2}{2})=(\dfrac{3}{2}，-\dfrac{9}{4})\Rightarrow a=-\dfrac{3}{2}，b=-\dfrac{9}{8}$．

20.若方程式$(x^2+y^2+2x-1)+k(x^2+2y^2-1)=0$表一抛物線，則$k=$____________．

解答 -1

解析 $(x^2+y^2+2x-1)+k(x^2+2y^2-1)=0$

$\Rightarrow(1+k)x^2+(1+2k)y^2+2x-(1+k)=0$之圖形爲抛物線，

則必y^2之係數$1+2k\neq0$，而x^2之係數$1+k=0$，$\therefore k=-1$．

21.抛物線$y=ax^2+bx+1$的正焦弦長爲$\dfrac{1}{3}$，開口向下，其焦點爲$(k，\dfrac{9}{4})$，又$k>0$，則

(1)抛物線之對稱軸方程式爲____________．　(2)準線方程式爲____________．

解答 (1) $x-\dfrac{2}{3}=0$;(2) $y=\dfrac{29}{12}$

解析 $y=ax^2+bx+1=a(x+\dfrac{b}{2a})^2-\dfrac{b^2}{4a}+1\Rightarrow(x+\dfrac{b}{2a})^2=\dfrac{1}{a}(y+\dfrac{b^2}{4a}-1)$，$a<0$，

頂點$(-\dfrac{b}{2a}，1-\dfrac{b^2}{4a})$，焦距$|\dfrac{1}{4a}|=-\dfrac{1}{4a}\Rightarrow$焦點$(-\dfrac{b}{2a}，1-\dfrac{b^2}{4a}+\dfrac{1}{4a})$．

正焦弦長$\dfrac{1}{-a}=\dfrac{1}{3}\Rightarrow a=-3$，$1-\dfrac{b^2}{4a}+\dfrac{1}{4a}=\dfrac{9}{4}\Rightarrow b^2=16$，

又焦點$(k，\dfrac{9}{4})$在對稱軸$x=-\dfrac{b}{2a}$上，$k>0$，$\therefore-\dfrac{b}{2a}>0$，又$a<0$，$\therefore b>0$，故$b=4$．

抛物線方程式$(x-\dfrac{2}{3})^2=\dfrac{1}{-3}(y-\dfrac{7}{3})$，對稱軸方程式$x-\dfrac{2}{3}=0$，頂點$(\dfrac{2}{3}，\dfrac{7}{3})$

$\Rightarrow$ 準線$y=\dfrac{7}{3}+\dfrac{1}{12}=\dfrac{29}{12}$．

22.設$A(1,-4)$, $B(5,2)$, 點C在曲線$y=x^2$上, 欲使$\triangle ABC$的面積最小, 則C點坐標爲____________．

解答 $(\dfrac{3}{4}，\dfrac{9}{16})$

解析 點C在$y=x^2$上，設$C(a，a^2)$，又$A(1，-4)$，$B(5，2)$

$\Rightarrow\overrightarrow{AB}=(4，6)$，$\overrightarrow{AC}=(a-1，a^2+4)$，

則$\triangle ABC$的面積$=\dfrac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}4&6\\a-1&a^2+4\end{vmatrix}\right|=\dfrac{1}{2}|4a^2-6a+22|=|2(a-\dfrac{3}{4})^2+\dfrac{79}{8}|$，

$\therefore$當$a=\dfrac{3}{4}$時，面積最小値爲$\dfrac{79}{8}$，此時$C(\dfrac{3}{4}，\dfrac{9}{16})$．

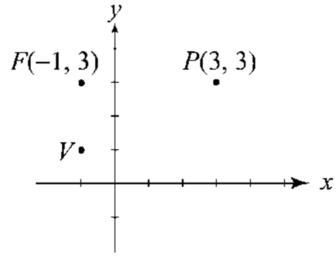
23.若抛物線$y=ax^2+bx+c$的焦點爲$(-1，3)$，且過點$(3，3)$，求$(a, b, c)=$____________．（$a>0$）

解答 $(\dfrac{1}{8}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{9}{8})$

解析

由圖知 $P(3,\ 3)$ 必為正焦弦的端點，

設焦點 F，頂點 V，則 $\overline{FV}=\dfrac{1}{2}\overline{FP}=\dfrac{1}{2}[3-(-1)]=2$……焦距，　.



$\because a>0$ 開口向上，故頂點 $V(-1,\ 1)$ 且方程式為 $(x+1)^2=4\times 2(y-1)$

$\Rightarrow x^2+2x+1=8y-8 \Rightarrow y=\dfrac{1}{8}x^2+\dfrac{1}{4}x+\dfrac{9}{8}$，故 $a=\dfrac{1}{8}$，$b=\dfrac{1}{4}$，$c=\dfrac{9}{8}$.

24.二次函數 $y=ax^2+bx+c$ 在 $x=-2$ 時有最小值 -1，且圖形交 y 軸於點(0，2)，則序組(a，b，c) = ____________ .

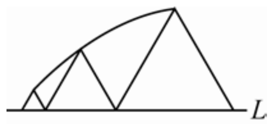
解答　$(\dfrac{3}{4}$，3，2)

解析　$y=ax^2+bx+c$ 在 $x=-2$ 時有最小值 $-1 \Rightarrow$ 拋物線頂點(-2，-1)且開口向上，

$\therefore y=ax^2+bx+c=a(x+2)^2-1$，過點(0，2)，$\therefore 2=a(0+2)^2-1 \Rightarrow a=\dfrac{3}{4}$，

故 $y=\dfrac{3}{4}(x+2)^2-1=\dfrac{3}{4}x^2+3x+2 \Rightarrow a=\dfrac{3}{4}$，$b=3$，$c=2$.

25.將邊長 2，6，10 之正三角形併排在一直線 L 上（如圖），若拋物線 Γ 以此直線 L 為對稱軸且其上方頂點都在 Γ 上，試求此拋物線 Γ 之焦距為____________ .



解答　$\dfrac{3}{2}$

解析　如圖，建立坐標，直線 L 置於 x 軸上，則 $A(1,\ \sqrt{3})$，$B(5,\ 3\sqrt{3})$，$C(13,\ 5\sqrt{3})$，

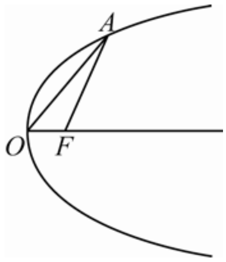
設拋物線為 $y^2=4c(x-h)$，

將 A，B，C 代入，$3=4c(1-h)$……①，

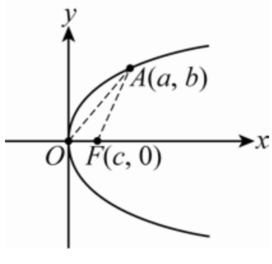
$27=4c(5-h)$……②，

$75=4c(13-h)$……③，

$\dfrac{①}{②}$：得 $h=\dfrac{1}{2} \Rightarrow c=\dfrac{3}{2}$，代入③合，$\therefore$焦距 $=|c|=\dfrac{3}{2}$.



27.如圖，有一拋物線開口向右，頂點為 $O(0,\ 0)$，焦點為 F，A 為拋物線上一點，$\overline{AF}=12$，$\overline{AO}=3\sqrt{21}$，求此拋物線方程式為____________ .



解答　$y^2=20x$ 或 $y^2=12x$

解析　建立坐標，設 $A(a,\ b)$，$F(c,\ 0)$，$c>0$，

設 Γ: $y^2=4cx$，過 $A(a,\ b)$，代入得 $b^2=4ac$……①，

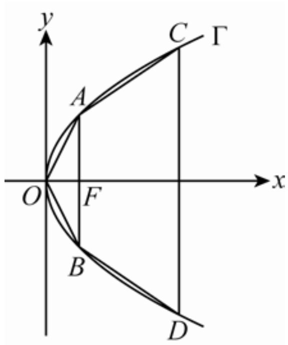
又 $12=\overline{AF}=\sqrt{(a-c)^2+b^2} \Rightarrow (a-c)^2+b^2=144$……②，

$3\sqrt{21}=\overline{AO}=\sqrt{a^2+b^2} \Rightarrow a^2+b^2=189$……③，

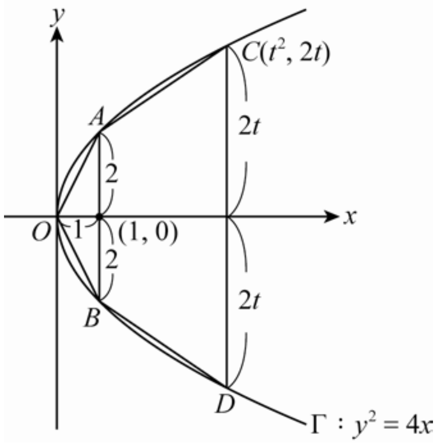
聯立解①②③得 $(a,\ b,\ c)=(7,\ 2\sqrt{35},\ 5)$ 或 $(9,\ 6\sqrt{3},\ 3)$，

得拋物線方程式為 $y^2=20x$ 或 $y^2=12x$.

28.如圖，Γ 之方程式為 $y^2=4x$，O 為 Γ 之頂點，且 $\overline{AB}$ 為 Γ 之正焦弦．已知 Γ 之另一弦 $\overline{CD}$ 與 $\overline{AB}$ 平行，且梯形 $ABDC$ 之面積為 $\triangle OAB$ 之面積的 9 倍，則 C 的 x 坐標為______.



解答 4



解析 $\Gamma: y^2 = 4x \Rightarrow c = 1 \Rightarrow \overline{AB} = 4|c| = 4 \Rightarrow \triangle OAB = \dfrac{1}{2} \times 4 \times 1 = 2$，

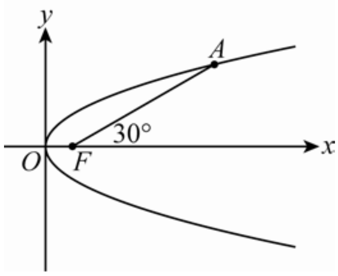
設 $C = (t^2,\ 2t)$， $t > 0$，則 $ABDC$ 之面積 $= \dfrac{(4t+4)\times(t^2-1)}{2}$，

已知：$\dfrac{(4t+4)(t^2-1)}{2} = 9 \times 2 \Rightarrow$

$(t+1)(t^2-1) = 9 \Rightarrow t^3 + t^2 - t - 10 = 0 \Rightarrow (t-2)(t^2+3t+5) = 0$

$\Rightarrow t = 2$，$\therefore C$ 的 x 坐標 $= t^2 = 4$ ．

29.如右圖，設一衛星 A 的軌道為拋物線，以地球 F 為焦點，當衛星與地球之距離為 4 百萬公里時，兩者連線與拋物線的軸成 30°，則衛星與地球的連線垂直於拋物線的軸時，兩者的距離為____________百萬公里．



解答 $400 - 200\sqrt{3}$

解析 建立坐標，令 $F(c,\ 0)$，$c > 0$，拋物線為 $\Gamma：y^2 = 4cx$，

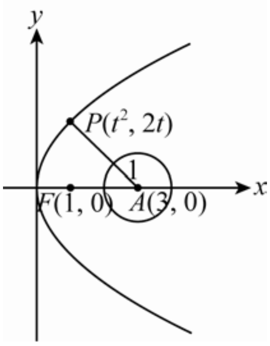
$A(400\cos 30° + c,\ 400\sin 30°) \Rightarrow A(200\sqrt{3} + c,\ 200)$ 代入 Γ 中，

$200^2 = 4 \times c \times (200\sqrt{3} + c) \Rightarrow c^2 + 200\sqrt{3}c - 10000 = 0$

$\Rightarrow c = -100\sqrt{3} \pm 200$（$-100\sqrt{3} - 200$ 不合，$\because c > 0$），

所求即為正焦弦長之半 $= 2c = 2(200 - 100\sqrt{3}) = 400 - 200\sqrt{3}$ ．

30.已知拋物線 $\Gamma：y^2 = 4x$ 與圓 $C：(x-3)^2 + y^2 = 1$，則 Γ 上一點 P 至 C 的最短距離為(1)____________，此時 P 坐標為(2)____________．



解答 (1) $2\sqrt{2} - 1$;(2)(1，±2)

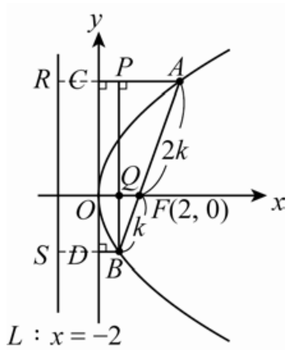
解析 設 $P(t^2,\ 2t)$，圓心 $A(3,\ 0)$

$\Rightarrow \overline{AP} = \sqrt{(t^2-3)^2 + (2t-0)^2} = \sqrt{t^4 - 2t^2 + 9} = \sqrt{(t^2-1)^2 + 8}$，

$\therefore$ 當 $t^2 = 1$ 時，即 $t = \pm 1$， $\overline{AP}$ 有最小值 $2\sqrt{2}$，

即當 $P(1,\ \pm 2)$時，Γ 至 C 的最短距離為 $2\sqrt{2} - 1$ ．

31.過 $F(2,\ 0)$的直線交拋物線 $y^2 = 8x$ 於 A，B 兩點，過 A，B 兩點作 y 軸垂線，分別交 y 軸於 C，D，若 $\overline{AF}：\overline{BF} = 2：1$，則梯形 $ABDC$ 面積為____________．



解答 $15\sqrt{2}$

解析 $y^2 = 8x$，$\therefore c = 2 \Rightarrow$ 焦點 $F(2,\ 0)$，準線 $L：x + 2 = 0$，

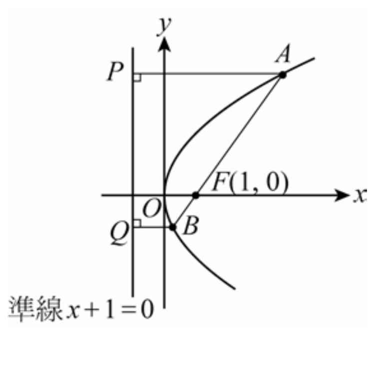
作圖如下，設 $\overline{AF} = 2k$， $\overline{BF} = k$，

由定義知 $\overline{AR} = 2k$， $\overline{BS} = k$，則 $\overline{AP} = k$， $\overline{QF} = 4 - k$，

$\therefore \dfrac{4-k}{k} = \dfrac{1}{3}$，$\therefore k = 3 \Rightarrow \overline{AR} = 6$， $\overline{BS} = 3$，

$\therefore B$ 點之 x 坐標為 1，設 $B(1,\ y)$，$y < 0$，代入

$y^2 = 8x$，$\therefore y = \pm 2\sqrt{2} \Rightarrow B(1,\ -2\sqrt{2}) \Rightarrow \overline{BP} = 3\overline{BQ} = 6\sqrt{2}$，



$\therefore$梯形 $ABDC$ 面積$=\frac{1}{2}\times(1+4)\times 6\sqrt{2}=15\sqrt{2}$.

32.過拋物線 Γ：$y^2=4x$ 的焦點 F 的直線與 Γ 相交於 $A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$兩點，若 $x_1+x_2=6$，則 $\overline{AB}$ 弦長為____________ .

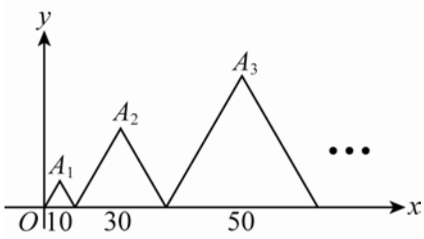
解答　8

解析　作圖如下，由拋物線定義知：$\overline{AF}=\overline{AP}$， $\overline{BF}=\overline{BQ}$

$\Rightarrow \overline{AB}=\overline{AF}+\overline{BF}=\overline{AP}+\overline{BQ}$

$=(x_1+1)+(x_2+1)=(x_1+x_2)+2=6+2=8$.

33.阿蘭注意到有一排正三角形木架，每一個上方頂點各有一個照明燈 A_1，A_2，A_3，…等，這些燈似乎連綴成一條曲線，如下圖．阿妙發現這些三角架的邊長依次為 10，30，50，…等而成一等差數列．她斷定這些燈是在同一條拋物線上，且頂點在圖中之 x 軸上，試求此拋物線方程式為____________ .



解答　$y^2=30x-75$

解析　A_1坐標為$(5，5\sqrt{3})$，A_2坐標為$(10+15，15\sqrt{3})$，A_3坐標為$(10+30+25，25\sqrt{3})$，

若 A_1，A_2，A_3等在同一拋物線上，且頂點在圖中之 x 軸上，

則可設此拋物線方程式為 $y^2=4c(x-h)$，

$\because$ $A_1(5，5\sqrt{3})$，$A_2(25，15\sqrt{3})$皆在此拋物線上，

$\therefore \begin{cases} 75=4c(5-h) \\ 675=4c(25-h) \end{cases} \Rightarrow h=\frac{5}{2}$，$c=\frac{15}{2}$，則方程式為 $y^2=30(x-\frac{5}{2})$，即 $y^2=30x-75$.

34.將拋物線 Γ：$y=x^2+2x+3$ 平行直線 $x-2y=0$ 向右上方移動 $\sqrt{5}$ 單位長，則移動後的拋物線焦點坐標為____________ .

解答　$(1，\frac{13}{4})$

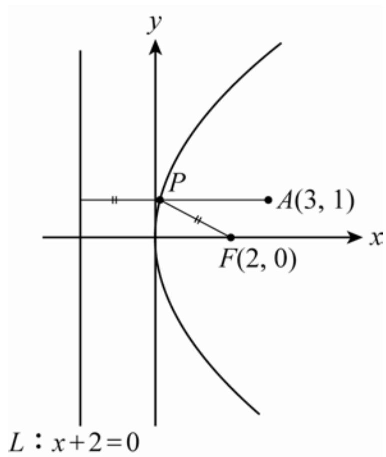
解析　$x-2y=0$ 之法向量為$(1，-2)\Rightarrow$ 方向向量可為$(2，1)$，

設 Γ 之平移向量 $\overrightarrow{v}=k(2，1)$，$k>0$（$\because$向右上方移動）取 $\overrightarrow{v}=(2，1)$，

Γ：$y=x^2+2x+3=(x+1)^2+2$，$\therefore (x+1)^2=y-2=4\times\frac{1}{4}(y-2)$

$\Rightarrow$ 焦點$(0，\frac{1}{4})+(-1，2)=(-1，\frac{9}{4})$，$\therefore$平移後之焦點為$(-1，\frac{9}{4})+\sqrt{5}\times\frac{(2,1)}{\sqrt{5}}=(1，\frac{13}{4})$.

35.設拋物線 Γ：$y^2=8x$，其焦點 F，P 為 Γ 上的動點，$A(3，1)$，則 $\overline{PF}+\overline{PA}$ 之最小值 $=$ (1)____________，此時 P 之坐標為(2)____________ .



解答　(1)5;(2)$(\frac{1}{8}，1)$

解析　Γ：$y^2=8x$，$\therefore c=2\Rightarrow F(2，0)$，準線 L：$x+2=0$，

$\overline{PA}+\overline{PF}=\overline{PA}+d(P，L)\ge d(A，L)=3+2=5$，

令 $y=1$ 代入 Γ 中，$\therefore x=\frac{1}{8}$，即 $P(\frac{1}{8}，1)$.

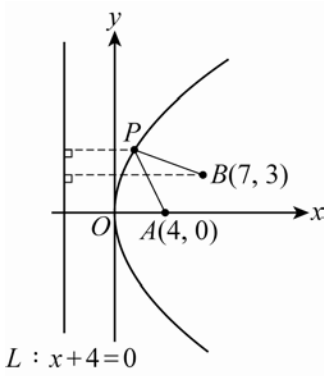
36.設點 $P(x，y)$在抛物線 $y^2 = 16x$ 上，則 $\sqrt{(x-4)^2+y^2}+\sqrt{(x-7)^2+(y-3)^2}$ 之最小值爲＿＿＿＿＿＿．

解答　11

解析　設 $A(4，0)$，$B(7，3) \Rightarrow$ 所求 $= \overline{PA}+\overline{PB}$ 之最小值，

又 $y^2 = 16x$，$\therefore c = 4 \Rightarrow$ 焦點$(4，0)$，準線 $L：x + 4 = 0$

$\Rightarrow \overline{PA}+\overline{PB} = d(P，L)+\overline{PB} \ge d(B，L) = 11$．



37.設抛物線 $\Gamma：x^2 = 8y$ 上有兩點 A，B，且 $\overline{AB}$ 的中點坐標爲$(2，4)$，若 F 爲抛物線的焦點，則 $\overline{AF}+\overline{BF} =$＿＿＿＿＿＿．

解答　12

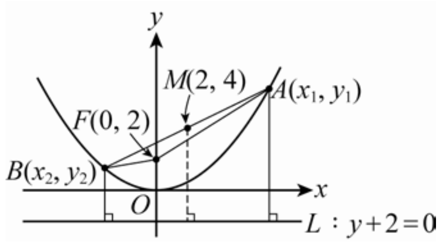
解析　$x^2 = 8y$，$\therefore c = 2 \Rightarrow$ 焦點 $F(0，2)$，準線 $L：y + 2 = 0$，

令 $A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$，$M(2，4) \Rightarrow \dfrac{y_1+y_2}{2} = 4,\quad y_1+y_2 = 8$

$\Rightarrow \overline{AF}+\overline{BF} = d(A，L) + d(B，L)$

$= (y_1 + 2) + (y_2 + 2) = (y_1 + y_2) + 4$

$= 2d(M，x$ 軸$) + 4 = 8 + 4 = 12$．



38.將抛物線 $y^2 = 2x$ 伸縮 3 倍，則所得圖形

(1)方程式爲＿＿＿＿＿＿，　(2)其頂點爲＿＿＿＿＿＿，　(3)焦點爲＿＿＿＿＿＿，

(4)準線爲＿＿＿＿＿＿，　(5)焦距爲＿＿＿＿＿＿．

解答　(1)$y^2 = 6x$;(2)$(0，0)$;(3)$(\dfrac{3}{2}，0)$;(4) $x+\dfrac{3}{2}=0$;(5) $\dfrac{3}{2}$

解析　$y^2 = 2x$ 伸縮 3 倍 $\Rightarrow (\dfrac{y}{3})^2 = 2(\dfrac{x}{3}) \Rightarrow y^2 = 6x$，$\therefore 4c = 6$，$c = \dfrac{3}{2}$

$\Rightarrow$ 頂點$(0，0)$，焦點$(\dfrac{3}{2}，0)$，準線：$x+\dfrac{3}{2}=0$，焦距 $=\dfrac{3}{2}$．

39.將抛物線 $y^2 = 4x$ 伸縮 $\dfrac{3}{2}$ 倍後，再平移向量$(-1，2)$，則所得新抛物線方程式爲＿＿＿＿＿＿．

解答　$(y-2)^2 = 6(x+1)$

解析　$y^2 = 4x \xrightarrow{\text{伸縮}\frac{3}{2}\text{倍}} (\dfrac{2y}{3})^2 = 4\times\dfrac{2x}{3},\quad y^2 = 6x \xrightarrow{\text{平移}\,\vec{v}=(-1,\ 2)} (y-2)^2 = 6(x+1)$．

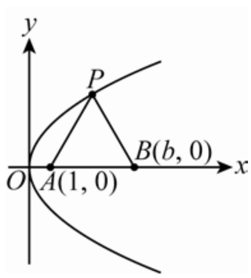
40.設 $A(1，0)$與 $B(b，0)$爲坐標平面上的兩點，其中 $b > 1$．若抛物線 $\Gamma：y^2 = 4x$ 上有一點 P 使得$\triangle ABP$ 爲一正三角形，則 $b =$＿＿＿＿＿＿．

解答　5

解析　如圖，$A(1，0)$，$B(b，0)$，$b > 1$，$\triangle ABP$ 爲正△，

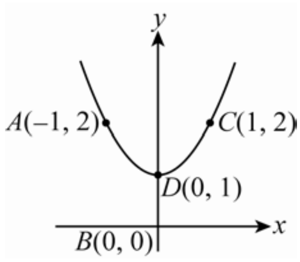
$\therefore$設 $P(\dfrac{b+1}{2}，\dfrac{\sqrt{3}}{2}(b-1))$，又 P 在抛物線 $\Gamma：y^2 = 4x$ 上

$\Rightarrow [\dfrac{\sqrt{3}}{2}(b-1)]^2 = 4\cdot\dfrac{b+1}{2} \Rightarrow 3b^2 - 14b - 5 = 0 \Rightarrow (b-5)(3b+1) = 0 \Rightarrow b = 5，-\dfrac{1}{3}$（不合）．



41.已知坐標平面上的四個點，$A(-1,\ 2)$，$B(0,\ 0)$，$C(1,\ 2)$，$D(x,\ y)$，其中 D 爲 $\overline{AB}$ 中點與 $\overline{BC}$ 中點的連線段的中點．設有一拋物線通過 A，D，C 三點，則此拋物線的焦點坐標爲____________．

解答　$(0,\ \dfrac{5}{4})$

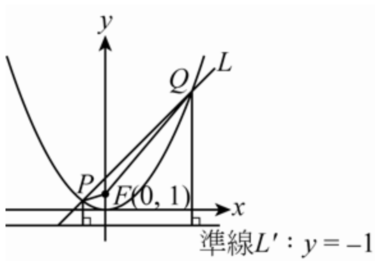


解析　$\overline{AB}$ 中點爲 $(-\dfrac{1}{2},\ 1)$，$\overline{BC}$ 中點爲 $(\dfrac{1}{2},\ 1)$，故 D 坐標爲 $(0,\ 1)$．

由圖設拋物線爲 $x^2=4c(y-1)$，$\because$ 過點 $(1,\ 2)$，故 $1^2=4c(2-1)\Rightarrow c=\dfrac{1}{4}$，

$\therefore$ 焦點爲 $(0,\ 1+\dfrac{1}{4})=(0,\ \dfrac{5}{4})$．

42.在坐標平面上，設直線 L：$y=x+2$ 與拋物線 Γ：$x^2=4y$ 相交於 P，Q 兩點．若 F 表拋物線 Γ 的焦點，則 $\overline{PF}+\overline{QF}=$____________．



解答　10

解析　設交點 $P(x_1,\ y_1)$，$Q(x_2,\ y_2)$，$x^2=4y$，$4c=4$，$c=1$，

$\therefore$ 準線 L'：$y=-1$．

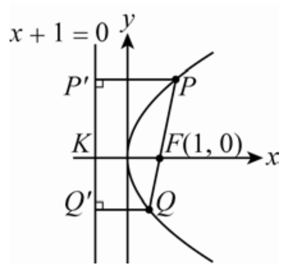
直線 L 代入 Γ 中得 $(y-2)^2=4y\Rightarrow y^2-8y+4=0$，

因 y_1 與 y_2 爲方程式之兩根，由根與係數關係得 $y_1+y_2=8$，

$\overline{PF}+\overline{QF}=d(P,\ L')+d(Q,\ L')=[y_1-(-1)]+[y_2-(-1)]=y_1+y_2+2=8+2=10$．

43.在坐標平面上，過 $F(1，0)$的直線交拋物線 $\Gamma:y^2=4x$ 於 P，Q 兩點，其中 P 在上半平面，且知 $2\overline{PF}=3\overline{QF}$，則 P 點的 x 坐標爲____________．（化成最簡分數）

解答　$\dfrac{3}{2}$



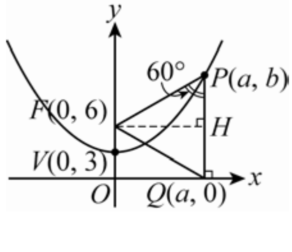
解析　$\because(P$ 到 x 軸距離$)$：$(Q$ 到 x 軸距離$)=\overline{PF}$ ：$\overline{QF}=3$：2，

$\therefore$ 設 $P(\dfrac{9t^2}{4}，3t)$，$Q(t^2，-2t)$，其中 $t>0$．

拋物線的定義：到焦點距離 ＝ 到準線距離，

$\therefore\ \overline{PF}=1+\dfrac{9t^2}{4}$，$\overline{QF}=1+t^2\Rightarrow 2(1+\dfrac{9t^2}{4})=3(1+t^2)$．$\therefore t^2=\dfrac{2}{3}$，故 P 點的 x 坐標爲 $\dfrac{9}{4}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{3}{2}$．

44.坐標平面上有一以點 $V(0，3)$爲頂點，$F(0，6)$爲焦點的拋物線．設 $P(a，b)$爲此拋物線上一點，$Q(a，0)$爲 P 在 x 軸上的投影，滿足 $\angle FPQ=60°$，則 $b=$____________．



解答　12

解析　$\because V(0，3)$爲頂點，$F(0，6)$爲焦點，$\therefore$ 準線爲 x 軸．

由定義：$\overline{PF}=d(P$，準線：x 軸$)=\overline{PQ}$，

$\therefore\ \overline{PH}+\overline{HQ}=\dfrac{b}{2}+6=b$，$\therefore b=12$．

45.已知坐標平面上圓 O_1：$(x-7)^2+(y-1)^2=144$ 與 O_2：$(x+2)^2+(y-13)^2=9$ 相切，且此兩圓均與直線 L：$x=-5$ 相切．若 Γ 爲以 L 爲準線的拋物線，且同時通過 O_1 與 O_2 的圓心，則 Γ 的焦點坐標爲_____．

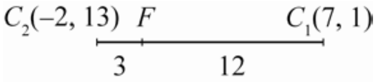
解答 $(-\frac{1}{5},\ \frac{53}{5})$

解析 ①∵ O_1 的圓心 $C_1(7,\ 1)$，半徑 $r_1=12$， O_2 的圓心 $C_2(-2,\ 13)$，半徑 $r_2=3$，

且 $\overline{C_1C_2}=\sqrt{(7+2)^2+(1-13)^2}=15=r_1+r_2$， ∴ O_1 和 O_2 外切．

②設拋物線焦點 F，∵拋物線通過 C_1， C_2 且準線 L： $x=-5$，

∴ $d(C_1,\ F)=d(C_1,\ L)=12$， $d(C_2,\ F)=d(C_2,\ L)=3$，



故焦點 F 恰爲 O_1， O_2 的切點且 $\overline{C_1F}$ ： $\overline{C_2F}=4$ ：1，

利用分點公式， $F(\frac{1\times7+4\times(-2)}{5},\ \frac{1\times1+4\times13}{5})=(-\frac{1}{5},\ \frac{53}{5})$ ．

46.假設 Γ_1 爲坐標平面上一開口向上的拋物線，其對稱軸爲 $x=\frac{-3}{4}$ 且焦距（焦點到頂點的距離）爲 $\frac{1}{8}$ ．若 Γ_1 與另一拋物線 Γ_2： $y=x^2$ 恰交於一點，則 Γ_1 的頂點之 y 坐標爲＿＿＿＿＿＿．（化成最簡分數）

解答 $\frac{9}{8}$

解析 拋物線 Γ_1 的頂點之 y 坐標爲 k 時，Γ_1： $(x+\frac{3}{4})^2=4\cdot\frac{1}{8}(y-k)$，

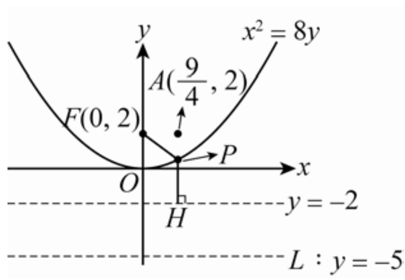
整理得 Γ_1： $y=2x^2+3x+\frac{9}{8}+k$， Γ_2： $y=x^2$，

因 Γ_1 與 Γ_2 恰相交於一點，即 $2x^2+3x+\frac{9}{8}+k=x^2$ 恰有一解，

$x^2+3x+(\frac{9}{8}+k)=0$ 恰有一解， $D=9-4(\frac{9}{8}+k)=0$，得 $k=\frac{9}{8}$ ．

47.坐標平面上給定點 $A(\frac{9}{4},\ 2)$、直線 L： $y=-5$ 與拋物線 Γ：$x^2=8y$．以 $d(P,\ L)$表示點 P 到直線 L 的距離．若點 P 在 Γ 上變動，則｜$d(P,\ L)-\overline{AP}$｜之最大值爲＿＿＿＿＿＿．（化成最簡分數）

解答 $\frac{21}{4}$



解析 P 爲拋物線上之點，Γ 的準線爲 $y=-2$，焦點 $F(0，2)$，

設 P 到準線 $y=-2$ 的垂足爲 H，由定義知： $\overline{PF}=\overline{PH}$，

$\overline{PF}\le\overline{AF}+\overline{AP}$， $\overline{PF}\le\frac{9}{4}+\overline{AP}$， ∴ $-\overline{AP}\le\frac{9}{4}-\overline{PF}$，

｜$d(P,\ L)-\overline{AP}$｜$\le(\overline{PH}+3)+(\frac{9}{4}-\overline{PF})=\frac{21}{4}$，∴最大值爲 $\frac{21}{4}$ ．