高雄市明誠中學 高二數學平時測驗					日期：101.05.08
範圍	3-3 轉移矩陣、反矩陣	班級	二年____班	姓名	
		座號			

一、填充題 (每題 10 分)

1.設 $A=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1&4\\2&-3\end{bmatrix}$，$C=\begin{bmatrix}2&3\\-1&1\end{bmatrix}$；若 $X+2B=3C$，則(1) $A^{-1}=$______． (2) $X=$_______．

解答 (1)$\begin{bmatrix}-2&1\\\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}$;(2)$\begin{bmatrix}4&1\\-7&9\end{bmatrix}$

解析 (1)∵行列式值 $\det(A)=-2$，∴ $A^{-1}=\frac{1}{-2}\begin{bmatrix}4&-2\\-3&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2&1\\\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}$．

(2) $X=3C-2B=3\begin{bmatrix}2&3\\-1&1\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}1&4\\2&-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6&9\\-3&3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2&-8\\-4&6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&1\\-7&9\end{bmatrix}$．

2.設實係數二階方陣 A 滿足 $A\begin{bmatrix}7\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$，$A\begin{bmatrix}9\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\5\end{bmatrix}$，若 $A=\begin{bmatrix}2&1\\1&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$，則數對$(a，b，c，d)$

=____________．

解答 (4，−9，−3，7)

解析 由題意得 $A\begin{bmatrix}7&9\\3&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1\\1&5\end{bmatrix}$，設$\begin{bmatrix}7&9\\3&4\end{bmatrix}=B\Rightarrow B^{-1}=\frac{1}{28-27}\begin{bmatrix}4&-9\\-3&7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&-9\\-3&7\end{bmatrix}$，

$A=ABB^{-1}=\begin{bmatrix}2&1\\1&5\end{bmatrix}B^{-1}=\begin{bmatrix}2&1\\1&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4&-9\\-3&7\end{bmatrix}$，故$\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&-9\\-3&7\end{bmatrix}$．

3.設 $A=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}2&0\\-3&-1\end{bmatrix}$，則$(AB)^{-1}=$____________．

解答 $\begin{bmatrix}-1&\frac{1}{2}\\\frac{3}{2}&-1\end{bmatrix}$

解析 $AB=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&0\\-3&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4&-2\\-6&-4\end{bmatrix}$，又$\begin{vmatrix}-4&-2\\-6&-4\end{vmatrix}=16-12=4$，

所以$(AB)^{-1}=\begin{bmatrix}-4&-2\\-6&-4\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}-4&2\\6&-4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&\frac{1}{2}\\\frac{3}{2}&-1\end{bmatrix}$．

4.設 $A=\begin{bmatrix}a-3&-1\\-2&a-2\end{bmatrix}$，若 A^{-1}不存在，則 $a=$____________．

解答 1 或 4

解析 $A=\begin{bmatrix}a-3&-1\\-2&a-2\end{bmatrix}$，$A^{-1}$不存在 $\Rightarrow|A|=\begin{vmatrix}a-3&-1\\-2&a-2\end{vmatrix}=a^2-5a+4=0\Rightarrow a=1$ 或 4．

5.設方陣 $A=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}$，且 B 爲二階方陣，滿足 $AB=\begin{bmatrix}4&0\\0&4\end{bmatrix}$，則(1)$B=$________．　(2)$BA=$_________．

解答　(1)$\begin{bmatrix}-8&4\\6&-2\end{bmatrix}$;(2)$\begin{bmatrix}4&0\\0&4\end{bmatrix}$

解析　$A=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}$且 $AB=\begin{bmatrix}4&0\\0&4\end{bmatrix}=4\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=4AA^{-1}$，所以 $B=4A^{-1}$，而 $A^{-1}=\dfrac{1}{-2}\begin{bmatrix}4&-2\\-3&1\end{bmatrix}$，

因此 $B=-2\begin{bmatrix}4&-2\\-3&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-8&4\\6&-2\end{bmatrix}$且 $BA=AB=\begin{bmatrix}4&0\\0&4\end{bmatrix}$（因爲此時 A，B 之乘積可交換）．

6.設 $A=\begin{bmatrix}2&\alpha\\3&\beta\end{bmatrix}$， $B=\begin{bmatrix}2&-1\\-2&1\end{bmatrix}$，

(1)若 $AB=BA$，則數對 $(\alpha,\beta)=$___________．(2)若 $A=A^{-1}$，則數對 $(\alpha,\beta)=$___________．

解答　(1) $(\dfrac{3}{2},\dfrac{7}{2})$;(2)　$(-1,-2)$

解析　(1) $AB=\begin{bmatrix}4-2\alpha&-2+\alpha\\6-2\beta&-3+\beta\end{bmatrix}$， $BA=\begin{bmatrix}1&2\alpha-\beta\\-1&-2\alpha+\beta\end{bmatrix}$，

$AB=BA$， $4-2\alpha=1$， $-2+\alpha=2\alpha-\beta\Rightarrow\alpha=\dfrac{3}{2}$， $\beta=\dfrac{7}{2}$．

(2) $A^{-1}=\dfrac{1}{2\beta-3\alpha}\begin{bmatrix}\beta&-\alpha\\-3&2\end{bmatrix}$，

$A=A^{-1}\Rightarrow 2=\dfrac{\beta}{2\beta-3\alpha}$， $\alpha=\dfrac{-\alpha}{2\beta-3\alpha}$， $3=\dfrac{-3}{2\beta-3\alpha}$， $\beta=\dfrac{2}{2\beta-3\alpha}$，

解得 $\alpha=-1$， $\beta=-2$．

7.若方陣 X 滿足 $\begin{bmatrix}2&1\\3&2\end{bmatrix}X\begin{bmatrix}3&-2\\-5&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&-4\\-3&1\end{bmatrix}$，則 $X=$____________．

解答　$\begin{bmatrix}24&13\\-34&-18\end{bmatrix}$

解析　$\begin{bmatrix}2&1\\3&2\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}2&-1\\-3&2\end{bmatrix}$， $\begin{bmatrix}3&-2\\-5&3\end{bmatrix}^{-1}=\dfrac{1}{-1}\begin{bmatrix}3&2\\5&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3&-2\\-5&-3\end{bmatrix}$，

又 $\begin{bmatrix}2&1\\3&2\end{bmatrix}X\begin{bmatrix}3&-2\\-5&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&-4\\-3&1\end{bmatrix}$時，

$X=\begin{bmatrix}2&1\\3&2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}2&-4\\-3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&-2\\-5&3\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}2&-1\\-3&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&-4\\-3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3&-2\\-5&-3\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}7&-9\\-12&14\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3&-2\\-5&-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}24&13\\-34&-18\end{bmatrix}$．

8.矩陣可以用來做秘密通訊，雙方先約定用二位數字，01，02，03，⋯，26 分別表示英文字母 A， B， C， ⋯， Z， 並用 00 表示空格，現在若要傳“*I LOVE YOU*”給朋友，先將英文化爲數字的二列矩陣 $A=\begin{bmatrix}0&0&1&1&2&0&0&2&1&2\\9&0&2&5&2&5&0&5&5&1\end{bmatrix}$，再把 A 傳去給朋友，朋友收到 A 之後再把矩陣所代表的數值換回英文字母即可，但是爲了保密，先找矩陣 $X=\begin{bmatrix}3&4\\2&3\end{bmatrix}$，使

$B=XA=\begin{bmatrix}36 & 0 & 11 & 23 & 14 & 20 & 0 & 26 & 23 & 10\\ 27 & 0 & 8 & 17 & 10 & 15 & 0 & 19 & 17 & 7\end{bmatrix}$，再將 B 傳給朋友，朋友收到 B 後，做個解密動作（即 $X^{-1}B$）即可還原得到 A 而得到訊息．現在收到一個訊息

$C=\begin{bmatrix}28 & 23 & 23 & 16 & 0 & 11 & 10 & 12 & 7\\ 21 & 17 & 17 & 12 & 0 & 8 & 7 & 9 & 5\end{bmatrix}$，請問這表示什麼訊息？____________．

解答　*GOOD LUCK*

解析　$X^{-1}C=\begin{bmatrix}3 & -4\\ -2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}28 & 23 & 23 & 16 & 0 & 11 & 10 & 12 & 7\\ 21 & 17 & 17 & 12 & 0 & 8 & 7 & 9 & 5\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1\\ 7 & 5 & 5 & 4 & 0 & 2 & 1 & 3 & 1\end{bmatrix}$,

$G\quad O\quad O\quad D\qquad L\quad U\quad C\quad K$.

9.甲、乙二家電視台，在下午 7 時到 8 時的電視節目中，收視率各為 $\frac{1}{2}$，現二電視台分別將這段時間內的節目革新，在前 6 個月內，收視率有下列的變化：(1)甲台的原有觀眾，有 70%看甲台，30%改看乙台，(2)乙台的原有觀眾，有 60%改看甲台，40%仍看乙台，假設這種現象仍然繼續，問一年以後二電視台的收視率分別是____________．

解答　甲 66.5%，乙 33.5%

解析　$\begin{array}{c c}& \begin{array}{cc}\text{甲} & \text{乙}\end{array}\\ \begin{array}{c}\text{甲}\\ \text{乙}\end{array} & \begin{bmatrix}0.7 & 0.6\\ 0.3 & 0.4\end{bmatrix}\end{array}^2\times\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.7 & 0.6\\ 0.3 & 0.4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.65\\ 0.35\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.665\\ 0.335\end{bmatrix}$,

$\therefore$甲收視率 66.5%，乙收視率 33.5%．

10.有 M 牌的行動電話，根據調查，每一觀察期後有 70%的使用者仍使用 M 牌，而其他品牌的使用者有 20%轉用 M 牌，則(1)試求其轉移矩陣＝____．(2)當市場在穩定狀態時，M 牌在市場的占有率為____．

解答　(1)$\begin{bmatrix}0.7 & 0.2\\ 0.3 & 0.8\end{bmatrix}$; (2)40%

解析　設使用 M 牌的有 X 人，其他品牌的有 Y 人，

$\begin{bmatrix}0.7 & 0.2\\ 0.3 & 0.8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X\\ Y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}X\\ Y\end{bmatrix}$，$\begin{cases}0.7X+0.2Y=X\\ 0.3X+0.8Y=Y\end{cases}$，得 $X:Y=2:3$，

M 牌的市場占有率為 $\frac{2}{5}=40\%$．

11.某地區有甲、乙、丙三家報社，據調查顯示：

甲報社每年保留 80%的顧客，而轉向乙報社與丙報社訂購的顧客，分別占 10%與 10%；

乙報社則每年保留 70%的顧客，而轉向甲報社與丙報社訂購的顧客分別占 20%與 10%；

丙報社每年保留 60%的顧客，而轉向甲報社與乙報社的顧客分別占 10%與 30%；

若目前甲、乙、丙三報社的市場占有率分別為 20%，30%，50%，且顧客總人數不變．已知最後報社供應市場會趨於穩定，試問其穩定狀態時，乙報社之市場占有率為____________．

解答　35%

解析 $\begin{array}{c|ccc} & 甲 & 乙 & 丙 \\ \hline 甲 & & & \\ 乙 & & \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.7 & 0.3 \\ 0.1 & 0.1 & 0.6 \end{bmatrix} & \\ 丙 & & & \end{array}$

$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 甲 & 乙 & 丙 \end{array} \\ \begin{array}{c} 甲 \\ 乙 \\ 丙 \end{array} & \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.7 & 0.3 \\ 0.1 & 0.1 & 0.6 \end{bmatrix} \end{array}$．即 $\begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.7 & 0.3 \\ 0.1 & 0.1 & 0.6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$，$\therefore \begin{cases} -2x+2y+z=0 \\ x-3y+3z=0 \\ x+y-4z=0 \end{cases} \Rightarrow x:y:z=9:7:4$，

故 $y=\dfrac{7}{9+7+4}\times 100\%=35\%$．　即乙報社的市占率為 35%．

12.籃球高手大雄比賽時，當他投進一球後，下一球投進的機率是 0.8，當他有一球沒投進後，則下一球投進的機率為 0.9，(1)如果他第一球沒投進，則他第 4 球投進的機率為________．
(2)就一般長期而言，他投籃投進的機率為_______．

解答 (1) 0.819;(2) $\dfrac{9}{11}$

解析

原來 / 後來	進	不進
進	0.8	0.9
不進	0.2	0.1

得轉移矩陣 T 為 $\begin{bmatrix} 0.8 & 0.9 \\ 0.2 & 0.1 \end{bmatrix}$．

(1)則 $X_1=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow X_2=TX_1=\begin{bmatrix} 0.8 & 0.9 \\ 0.2 & 0.1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.9 \\ 0.1 \end{bmatrix}$,

$X_3=TX_2=\begin{bmatrix} 0.8 & 0.9 \\ 0.2 & 0.1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.9 \\ 0.1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.72+0.09 \\ 0.18+0.01 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.81 \\ 0.19 \end{bmatrix}$,

$X_4=TX_3=\begin{bmatrix} 0.8 & 0.9 \\ 0.2 & 0.1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.81 \\ 0.19 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.648+0.171 \\ 0.162+0.019 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.819 \\ 0.181 \end{bmatrix}$，故第 4 球投進之機率為 0.819．

(2)設穩定態為 $X_k=\begin{bmatrix} a \\ 1-a \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0.8 & 0.9 \\ 0.2 & 0.1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ 1-a \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a \\ 1-a \end{bmatrix} \Rightarrow 0.8a+0.9-0.9a=a$，

$\therefore 11a=9 \Rightarrow a=\dfrac{9}{11}$，故長期而言，投籃投進的機率為 $\dfrac{9}{11}$．

13.假設有一學生，他的讀書習慣是：若他在今晚讀書，則他明晚有 70%的機率不讀書；若他在今晚不讀書，則他明晚有 50%的機率不讀書．若趨於穩定，則長期而言，他晚上讀書的機率為_________．

解答 $\dfrac{5}{12}$

解析 轉移矩陣為：$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} 讀 & 不讀 \end{array} \\ \begin{array}{c} 讀 \\ 不讀 \end{array} & \begin{bmatrix} 0.3 & 0.5 \\ 0.7 & 0.5 \end{bmatrix} \end{array}$，設晚上讀書機率為 x，不讀為 $1-x$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0.3 & 0.5 \\ 0.7 & 0.5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ 1-x \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x \\ 1-x \end{bmatrix} \Rightarrow 0.3x+0.5(1-x)=x \Rightarrow x=\dfrac{5}{12}$．

14.小明口袋裡有 2 個白球，大華口袋裡有 3 個紅球，現在兩人每次自口袋裡隨機取一個球和對方交換，求：
(1)在交換二次後，有 2 個紅球在小明口袋裡的機率＝___________．
(2)在經過長期交換後，小明口袋裡有 2 個紅球的機率趨近於何值____________．

解答 (1) $\dfrac{1}{3}$;(2) 0.3

解析 小明口袋中的球如下

後來＼原來	2白	1白1紅	2紅
2白	0	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}$	0
1白1紅	1	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}$	$1\cdot\frac{2}{3}$
2紅	0	$\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}$	$1\cdot\frac{1}{3}$

$\Rightarrow$ 轉移矩陣爲 $T=\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{6} & 0\\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{2}{3}\\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}$，

(1) $X_1=TX_0=\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{6} & 0\\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{2}{3}\\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$，

$X_2=TX_1=\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{6} & 0\\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{2}{3}\\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{6}\\ \frac{1}{2}\\ \frac{1}{3}\end{bmatrix}$，小明有兩個紅球的機率爲 $\frac{1}{3}$ ．

(2)設穩定態爲 $X_n=\begin{bmatrix}a\\b\\1-a-b\end{bmatrix}$，則 $\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{6} & 0\\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{2}{3}\\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\\1-a-b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a\\b\\1-a-b\end{bmatrix}$

$\Rightarrow\begin{cases}\frac{1}{6}b=a\\ a+\frac{b}{2}+\frac{2}{3}-\frac{2}{3}a-\frac{2}{3}b=b\end{cases}\Rightarrow b=6a$，$\therefore a+3a+\frac{2}{3}-\frac{2}{3}a-4a=6a$

$\Rightarrow a=\frac{1}{10}$，$b=\frac{6}{10}$，所求 $1-a-b=1-\frac{1}{10}-\frac{6}{10}=\frac{3}{10}=0.3$ ．

15.設甲箱內有 2 白球，乙箱內有 3 紅球，現在每次同時自各箱中隨機取出一個球交換，求在長期的交換後，2 白球在甲箱內的機率爲____________．

解答 $\frac{1}{10}$

解析　轉移矩陣 $T=\begin{array}{c|ccc} & 2白 & 1白1紅 & 2紅 \\ \hline 2白 & 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 1白1紅 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \\ 2紅 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}$．若 $T\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$，其中 $x+y+z=1$，

則 $\begin{cases} \frac{1}{6}y=x \\ x+\frac{1}{2}y+\frac{2}{3}z=y \\ \frac{1}{3}y+\frac{1}{3}z=z \\ x+y+z=1 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x=\frac{1}{10} \\ y=\frac{3}{5} \\ z=\frac{3}{10} \end{cases}$，∴長期交換後，2 白球在甲箱機率 $=\frac{1}{10}$．

16.設矩陣 $A=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$，若 $(B^{-1}AB)^{10}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，則 $c=$____________．

解答　1023

解析　$B^{-1}=\frac{1}{\text{行列式值}\det(B)}\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}=\frac{1}{-4+8}\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$，

$A^2=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2^2 & 0 \\ 0 & 1^2 \end{bmatrix}$，$A^4=A^2\cdot A^2=\begin{bmatrix} 2^2 & 0 \\ 0 & 1^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2^2 & 0 \\ 0 & 1^2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2^4 & 0 \\ 0 & 1^4 \end{bmatrix}$，

同理可得 $A^{10}=\begin{bmatrix} 2^{10} & 0 \\ 0 & 1^{10} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1024 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，

所求 $(B^{-1}AB)^{10}=B^{-1}A^{10}B=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1024 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix} 512 & 1 \\ -512 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1024+2 & -2048+2 \\ 1024-1 & 2048-1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1022 & -2046 \\ 1023 & 2047 \end{bmatrix}$．故 $c=1023$．

17.設二階方陣 A 滿足 $A^3=\begin{bmatrix} 3 & -10 \\ 2 & -7 \end{bmatrix}$，$A^5=\begin{bmatrix} 7 & -25 \\ 5 & -18 \end{bmatrix}$，求 $A=$____________．

解答　$\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$

解析　$A^2=A^5\cdot(A^3)^{-1}=\begin{bmatrix} 7 & -25 \\ 5 & -18 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 & -10 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$，

$A=A^3(A^2)^{-1}=\begin{bmatrix} 3 & -10 \\ 2 & -7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$．

18.設甲袋中有 3 白球 1 紅球，乙袋中有 2 白球，現自兩袋中各取出一球交換，再第二次各取一球交換，如此重複交換．在長期交換後，甲袋中有一紅球的機率為＿＿＿＿＿＿．

解答 $\frac{2}{3}$

解析 討論甲袋中球轉移情況：

甲原有	交換後	甲原有	交換後
3白1紅	3白1紅：$\frac{3}{4}\times 1=\frac{3}{4}$ 4白：$\frac{1}{4}\times 1=\frac{1}{4}$	4白	3白1紅：$1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ 4白：$1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

則轉移矩陣為 $\begin{array}{c} \\ 3W1R \\ 4W \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} 3W1R & 4W \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \end{array}$，

設長期交換後，$3W1R$ 的機率為 x，$4W$ 的機率為 $1-x$，

則 $\begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ 1-x \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x \\ 1-x \end{bmatrix}\Rightarrow \frac{3}{4}x+\frac{1}{2}(1-x)=x\Rightarrow x=\frac{2}{3}$．

19.甲袋中有 1 黑球 2 白球，乙袋中有 1 白球 1 黑球，每球被取到之機會相同，從甲袋中取 1 球放入乙袋，再從乙袋中取 1 球放回甲袋，此叫一回合，試求

(1)操作二回合後，甲袋中為 3 白球之機率為＿＿＿＿＿＿．

(2)長期操作後，當達穩定狀態時，甲袋中為 3 白球之機率為＿＿＿＿＿＿．

解答 (1)$\frac{1}{9}$;(2)$\frac{1}{10}$

解析 甲之轉移矩陣為 $T=\begin{array}{c} \\ 1B2W \\ 3W \\ 2B1W \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1B2W & 3W & 2B1W \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{6}{9} & \frac{2}{3} & \frac{4}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{2}{9} & 0 & \frac{5}{9} \end{bmatrix} \end{array}$，初始狀態 $X_{(0)}=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$，

(1) $X_{(1)}=TX_{(0)}=\begin{bmatrix} \frac{6}{9} \\ \frac{1}{9} \\ \frac{2}{9} \end{bmatrix}$，$X_{(2)}=TX_{(1)}=\begin{bmatrix} \frac{50}{81} \\ \frac{9}{81} \\ \frac{22}{81} \end{bmatrix}$，

$\therefore$3 白球之機率為 $\frac{9}{81}=\frac{1}{9}$．

(2)穩定狀態時，$1B2W$ 的機率爲 x，$3W$ 的機率爲 y，$2B1W$ 的機率爲 z，

$$\begin{bmatrix} \frac{6}{9} & \frac{2}{3} & \frac{4}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{2}{9} & 0 & \frac{5}{9} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases} \frac{6}{9}x+\frac{2}{3}y+\frac{4}{9}z=x \\ \frac{1}{9}x+\frac{1}{3}y+0z=y \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} -\frac{3}{9}x+\frac{2}{3}y+\frac{4}{9}z=0 \\ \frac{1}{9}x-\frac{2}{3}y=0 \end{cases}$$

$\Rightarrow x：y：z=6：1：3$，又 $x+y+z=1$，$\therefore y=\frac{1}{10}$.

20.已知 A 爲二階方陣，若 $A^3=\begin{bmatrix} 3 & -10 \\ 2 & -7 \end{bmatrix}$，$A^4=\begin{bmatrix} -4 & 15 \\ -3 & 11 \end{bmatrix}$，則 $A=$__________ .

解答 $\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$

解析 $\because A^3\times A=A^4$，$\therefore A=(A^3)^{-1}\times A^4$，

又 $(A^3)^{-1}=\dfrac{1}{\begin{vmatrix} 3 & -10 \\ 2 & -7 \end{vmatrix}}\begin{bmatrix} -7 & 10 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 7 & -10 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}\Rightarrow A=\begin{bmatrix} 7 & -10 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -4 & 15 \\ -3 & 11 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$.

21.某地區有甲、乙兩家報社，據調查顯示：甲報社每年保留 $\frac{1}{4}$ 的顧客，而有 $\frac{3}{4}$ 的顧客轉向乙報社訂購；乙報社則每年保留 $\frac{1}{2}$ 的顧客，而其他轉向甲報社訂購 . 若目前甲、乙報社的市場占有率分別爲 $\frac{3}{5}$，$\frac{2}{5}$，且顧客總人數不變：

(1)一年後市場占有率甲爲__________%.(2)兩年後的市場占有率甲爲__________%（取整數）.

解答 (1)35;(2)41

解析

	甲	乙
甲	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
乙	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$

，得 $T=\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$，$X_0=\begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{2}{5} \end{bmatrix}$，

(1) $X_1=TX_0=\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{2}{5} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{7}{20} \\ \frac{13}{20} \end{bmatrix}$，知甲占 35%，乙占 65% .

(2) $X_2=TX_1=\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{7}{20} \\ \frac{13}{20} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{33}{80} \\ \frac{47}{80} \end{bmatrix}$，知甲占 41.25%，乙占 58.75% .

22.設甲袋中有 2 個紅球，乙袋中有 2 個紅球 1 個白球，每次從甲袋任取 1 球與乙袋任取 1 球互換稱爲一局，試問 2 局後，甲袋中有 1 個白球的機率爲__________ .

解答　$\dfrac{7}{18}$

解析　設 P_k 表示甲袋中白球 k 個的狀態，

	$P_0(2R)$	$P_1(1R1W)$
$P_0(2R)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$
$P(1R1W)_1$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$

，得 $T=\begin{bmatrix}\frac{2}{3}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{3}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$， $X_0=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$.

$$X_1=TX_0=\begin{bmatrix}\frac{2}{3}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{3}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}\end{bmatrix},$$

$X_2=TX_1=\begin{bmatrix}\frac{2}{3}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{3}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{11}{18}\\\frac{7}{18}\end{bmatrix}$，故甲袋中有 1 個白球的機率爲 $\dfrac{7}{18}$.

23.設方陣 $A=\begin{bmatrix}0.7&0.4\\0.3&0.6\end{bmatrix}$, $P=\begin{bmatrix}4&-1\\3&1\end{bmatrix}$, n 是一正整數，試求：

(1) $P^{-1}=$____________ . (2) $P^{-1}AP=$____________ . (3) $A^n=$____________ .（提示：$(P^{-1}AP)^n$ 求 A^n ）

解答　(1) $\begin{bmatrix}\frac{1}{7}&\frac{1}{7}\\\frac{-3}{7}&\frac{4}{7}\end{bmatrix}$;(2) $\begin{bmatrix}1&0\\0&0.3\end{bmatrix}$;(3) $\begin{bmatrix}\frac{4+3\times0.3^n}{7}&\frac{4-4\times0.3^n}{7}\\\frac{3-3\times0.3^n}{7}&\frac{3+4\times0.3^n}{7}\end{bmatrix}$

解析　由 $A=\begin{bmatrix}0.7&0.4\\0.3&0.6\end{bmatrix}$， $P=\begin{bmatrix}4&-1\\3&1\end{bmatrix}$,

(1) $P^{-1}=\dfrac{1}{7}\begin{bmatrix}1&1\\-3&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{7}&\frac{1}{7}\\\frac{-3}{7}&\frac{4}{7}\end{bmatrix}$.

(2) $P^{-1}AP=\dfrac{1}{7}\begin{bmatrix}1&1\\-3&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.7&0.4\\0.3&0.6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4&-1\\3&1\end{bmatrix}=\dfrac{1}{7}\begin{bmatrix}1&1\\-3&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4&-0.3\\3&0.3\end{bmatrix}=\dfrac{1}{7}\begin{bmatrix}7&0\\0&2.1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&0.3\end{bmatrix}$.

(3)由(2)得 $(P^{-1}AP)^n=\begin{bmatrix}1&0\\0&0.3\end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix}1&0\\0&0.3^n\end{bmatrix}$，即 $P^{-1}A^nP=\begin{bmatrix}1&0\\0&0.3^n\end{bmatrix}$,

因此 $A^n=P\begin{bmatrix}1&0\\0&0.3^n\end{bmatrix}P^{-1}$,

所以 $A^n=\begin{bmatrix}4&-1\\3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&0.3^n\end{bmatrix}$（$\dfrac{1}{7}\begin{bmatrix}1&1\\-3&4\end{bmatrix}$）$=\begin{bmatrix}4&-0.3^n\\3&0.3^n\end{bmatrix}$（$\dfrac{1}{7}\begin{bmatrix}1&1\\-3&4\end{bmatrix}$）

$$=\frac{1}{7}\begin{bmatrix}4&-0.3^n\\3&0.3^n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\-3&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{4+3\times0.3^n}{7}&\frac{4-4\times0.3^n}{7}\\\frac{3-3\times0.3^n}{7}&\frac{3+4\times0.3^n}{7}\end{bmatrix}.$$

24.一實驗室培養兩種菌，令〈 a_n 〉和〈 b_n 〉分別代表兩種培養菌在時間點 n 的數量，彼此有如下的關係：$a_{n+1}=2(a_n+b_n),\ b_{n+1}=2b_n$（ $n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$ ），若二階方陣 $A=\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$滿足$\begin{bmatrix} a_{n+3} \\ b_{n+3} \end{bmatrix}=A\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix}$（其中 $n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$ ），則 $(p,q,r,s)=$____________ .

解答 $(8,24,0,8)$

解析 由 $a_{n+1}=2(a_n+b_n)$， $b_{n+1}=2b_n$，得 $\begin{bmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2a_n+2b_n \\ 2b_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix}$,

又 $\begin{bmatrix} a_{n+3} \\ b_{n+3} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{n+2} \\ b_{n+2} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^2\begin{bmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^3\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix}$,

所以 $A=\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^3=\begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 8 & 24 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$，求得 $p=8,\ q=24,\ r=0,\ s=8$.