高雄市明誠中學 高二數學平時測驗 日期：101.05.01					
範圍	3-2 矩陣運算	班級	二年____班	姓名	
		座號			

一、填充題　(每題 10 分)

1.若二階方陣 $\begin{bmatrix} x+y & y-2x \\ 2x+a & 4y+b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$，則

(1)數對$(x，y)=$____________ . (2)方陣$\begin{bmatrix} x & y \\ a+b & a-b \end{bmatrix}=$____________ .

解答　(1)(1，4);(2)$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -11 & 13 \end{bmatrix}$

解析　(1)當$\begin{bmatrix} x+y & y-2x \\ 2x+a & 4y+b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$時，$\begin{cases} x+y=5 \\ y-2x=2 \end{cases}$，可得 $x=1$，$y=4$， 所以$(x，y)=(1，4)$.

(2)又$\begin{cases} 2x+a=3 \\ 4y+b=4 \end{cases}$，因此$\begin{cases} a=1 \\ b=-12 \end{cases}$，所以$\begin{bmatrix} x & y \\ a+b & a-b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -11 & 13 \end{bmatrix}$.

2.設$\begin{bmatrix} x+3 & x+2y \\ x-y & 2x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y+2 & x^2+4 \\ y-x^2 & 2y-x \end{bmatrix}$，$x$，$y \in \mathbb{R}$，則數對$(x, y)=$____________ .

解答　(2, 3)

解析　$\begin{bmatrix} x+3 & x+2y \\ x-y & 2x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y+2 & x^2+4 \\ y-x^2 & 2y-x \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x+3=y+2 \cdots\cdots ① \\ x+2y=x^2+4 \cdots\cdots ② \\ x-y=y-x^2 \cdots\cdots ③ \\ 2x=2y-x \cdots\cdots ④ \end{cases}$，

由①④$\begin{cases} x-y=-1 \\ 3x-2y=0 \end{cases} \Rightarrow x=2$，$y=3$ 代入②③均合，∴$x=2$，$y=3$，即$(x, y)=(2, 3)$.

3.設 $A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 7 & 9 & 11 \\ 13 & 15 & 17 \end{bmatrix}$，則 $A-A^t=$____________ .

解答　$\begin{bmatrix} 0 & -4 & -8 \\ 4 & 0 & -4 \\ 8 & 4 & 0 \end{bmatrix}$

解析　$A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 7 & 9 & 11 \\ 13 & 15 & 17 \end{bmatrix} \Rightarrow$ 轉置矩陣(行列互換)$A^t=\begin{bmatrix} 1 & 7 & 13 \\ 3 & 9 & 15 \\ 5 & 11 & 17 \end{bmatrix} \Rightarrow A-A^t=\begin{bmatrix} 0 & -4 & -8 \\ 4 & 0 & -4 \\ 8 & 4 & 0 \end{bmatrix}$.

4.設有二矩陣 $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$，則 $4B-2A=$____________ .

解答　$\begin{bmatrix} 6 & 0 & -6 \\ -2 & 10 & 4 \end{bmatrix}$

解析　$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow 2A=\begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 6 & 2 & 4 \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow 4B=\begin{bmatrix} 8 & 4 & -4 \\ 4 & 12 & 8 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow 4B-2A=\begin{bmatrix} 6 & 0 & -6 \\ -2 & 10 & 4 \end{bmatrix}$.

5.設二矩陣 $A=(a_{ij})_{3\times 3}$ 滿足 $a_{ij}=\begin{cases} 1，i=j \\ 2，i\neq j \end{cases}$，$B=(b_{ij})_{3\times 3}$，若 $a_{ij}=i+j+b_{ij}$，則 $B=$____________ .

解答 $\begin{bmatrix} -1 & -1 & -2 \\ -1 & -3 & -3 \\ -2 & -3 & -5 \end{bmatrix}$

解析 $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$，由 $a_{ij}=i+j+b_{ij}\Rightarrow b_{ij}=a_{ij}-i-j$，$\therefore B=\begin{bmatrix} -1 & -1 & -2 \\ -1 & -3 & -3 \\ -2 & -3 & -5 \end{bmatrix}$.

6.n 階方陣 $A_n=(a_{ij})$ 滿足：$i\neq j$ 時 $a_{ij}=0$，$i=j$ 時 $a_{ij}=1$，則 $A_3=$____________ .

解答 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

解析 A_n 之第 i 列，第 i 行的元素為 1，而元素所在行與列不同時均為 0，此即 n 階方陣 A_n 之主對角線上之各元素均為 1，而不在主對角線上之各元素均為 0，

如 $A_2=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，$A_4=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，$\therefore A_3=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

7.已知三矩陣 A，B，C 中，$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$，$C=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$，則

(1) $AB=$____________ . (2) $A(B+C)=$____________ .

解答 (1)$\begin{bmatrix} 20 & 7 \\ 8 & 5 \end{bmatrix}$;(2)$\begin{bmatrix} 27 & 19 \\ 9 & 13 \end{bmatrix}$

解析 (1) $AB=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 20 & 7 \\ 8 & 5 \end{bmatrix}$. (2) $A(B+C)=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 2 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 27 & 19 \\ 9 & 13 \end{bmatrix}$.

8.設 $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$,$I_2=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$,則(1) $A^2=$________. (2) $A^3=$_________. (3) $(I_2+A)^3=$_________.

解答 (1)$\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$;(2)$\begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}$;(3)$\begin{bmatrix} 14 & -13 \\ -13 & 14 \end{bmatrix}$

解析 (1)$A^2=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}=2A$.

(2)$A^3=A^2A=2A^2=4A=\begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}$.

(3)因為 $I_2A=AI_2=A$，由二項式定理

$(I_2+A)^3=I_2^3+3I_2^2A+3I_2A^2+A^3=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}+3\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}+3\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3&-3\\-3&3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}6&-6\\-6&6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4&-4\\-4&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+3+6+4&0-3-6-4\\0-3-6-4&1+3+6+4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}14&-13\\-13&14\end{bmatrix}.$$

9.設 $A=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}k&2\\3&9\end{bmatrix}$，若 $AB=BA$，則 $k=$ ______________ .

解答 6

解析 $A=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}k&2\\3&9\end{bmatrix}$，由 $AB=BA$，$\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k&2\\3&9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}k&2\\3&9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}k+6&20\\3k+12&42\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}k+6&2k+8\\30&42\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}2k+8=20\\3k+12=30\end{cases}\Rightarrow k=6.$$

10.設矩陣 $A=\begin{bmatrix}-4&-6&5\\1&1&-1\\2&3&-2\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1&3&1\\0&-2&1\\1&0&2\end{bmatrix}$，且已知 $AB=BA$，則 $A^2B^2=$ ______________ .

解答 $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

解析 $AB=\begin{bmatrix}-4&-6&5\\1&1&-1\\2&3&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&3&1\\0&-2&1\\1&0&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=I$,

所以 $A^2B^2=AABB=A(AB)B=AIB=AB=I=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$.

11.若 $\begin{bmatrix}1&x\\y&1\end{bmatrix}^4=\begin{bmatrix}-7&-4\\8&-7\end{bmatrix}$，則$(x，y)=$ ______________ .

解答 $(1，-2)$

解析 設 $A=\begin{bmatrix}1&x\\y&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&x\\y&0\end{bmatrix}=I+B$，其中 $B=\begin{bmatrix}0&x\\y&0\end{bmatrix}$,

且 $B^2=\begin{bmatrix}0&x\\y&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&x\\y&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}xy&0\\0&xy\end{bmatrix}=xyI$,

$A^2=(I+B)^2=I+2B+B^2=(1+xy)I+2B$,

$A^4=(1+xy)^2I+4(1+xy)B+4xyI=(1+6xy+x^2y^2)I+4(1+xy)B=\begin{bmatrix}-7&-4\\8&-7\end{bmatrix}$

$$\Rightarrow\begin{cases}1+6xy+x^2y^2=-7\\4x(1+xy)=-4\\4y(1+xy)=8\end{cases}\Rightarrow(x，y)=(1，-2).$$

12.若 $A=\begin{bmatrix}1&-1\\1&1\end{bmatrix}$，則 $A^8=$ ______________ .

解答 $\begin{bmatrix}16&0\\0&16\end{bmatrix}$

解析

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{bmatrix}\Rightarrow A^2=\begin{bmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -2\\2 & 0\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix},$$

$$A^3=\begin{bmatrix}0 & -2\\2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & -2\\2 & -2\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}-1 & -1\\1 & -1\end{bmatrix},$$

$$A^4=\begin{bmatrix}-2 & -2\\2 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4 & 0\\0 & -4\end{bmatrix}=-4I\Rightarrow A^8=(A^4)^2=(-4I)^2=16I=\begin{bmatrix}16 & 0\\0 & 16\end{bmatrix}.$$

13.$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}$滿足 $AB=\begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}$，則 $a^2+b^2+c^2+d^2=$_____________．

解答 30

解析 $\begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}=AB=\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a+2c & b+2d\\3a+4c & 3b+4d\end{bmatrix}$，得 $\begin{cases}a+2c=2\\3a+4c=0\end{cases}$ 且 $\begin{cases}b+2d=0\\3b+4d=2\end{cases}$，

即 $a=-4$，$c=3$，$b=2$，$d=-1$，$a^2+b^2+c^2+d^2=30$．

14.$A=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\-1 & 1\end{bmatrix}$，$A+A^2+A^3+A^4=\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}$，則 $b-d=$_____________．

解答 $2+\sqrt{2}$

解析

$$A=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\-1 & 1\end{bmatrix},\ A^2=(\frac{1}{\sqrt{2}})^2\begin{bmatrix}1 & 1\\-1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\-1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{bmatrix},$$

$$A^3=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1 & 1\\-1 & -1\end{bmatrix},\ A^4=\begin{bmatrix}-1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix},$$

使 $A+A^2+A^3+A^4=\begin{bmatrix}-1 & \sqrt{2}+1\\-\sqrt{2}-1 & -1\end{bmatrix}$，得 $b=\sqrt{2}+1$，$d=-1$，$\therefore b-d=2+\sqrt{2}$．

15.$A=\begin{bmatrix}1 & 0\\-1 & 1\end{bmatrix}$，滿足 $A^2+\alpha A+I_2=O$ 之實數 $\alpha=$_____________．（O 表二階零矩陣）

解答 -2

解析 $A^2=\begin{bmatrix}1 & 0\\-1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\-1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\-2 & 1\end{bmatrix}$，使 $A^2=\begin{bmatrix}1 & 0\\-2 & 1\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}1 & 0\\-1 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}=2A-I_2$，

$\therefore A^2+(-2)A+I_2=O$，$\alpha=-2$．

可用公式: $A^2-(2+3)A+(2\times3-2\times1)I=O$

16.$A=\begin{bmatrix}1 & -1\\0 & 1\end{bmatrix}$，若 $A+A^2+A^3+\cdots+A^{20}=\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}$，則實數 $b=$_____________．

解答 -210

解析 $A=\begin{bmatrix}1 & -1\\0 & 1\end{bmatrix}$，$A^2=\begin{bmatrix}1 & -2\\0 & 1\end{bmatrix}$，$A^3=\begin{bmatrix}1 & -3\\0 & 1\end{bmatrix}$，$A^4=\begin{bmatrix}1 & -4\\0 & 1\end{bmatrix}$，$\cdots\Rightarrow A^n=\begin{bmatrix}1 & -n\\0 & 1\end{bmatrix}$

$\therefore b=-(1+2+3+\cdots+20)=-210$．

17.設 $A=\begin{bmatrix}2 & 1\\-3 & 5\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1 & 4\\-4 & 0\end{bmatrix}$，且 $3(X+A-2B)=X+A$，則 $X=$_____________．

解答 $\begin{bmatrix}1 & 11\\-9 & -5\end{bmatrix}$

解析 $3(X+A-2B)=X+A$ 時，$3X+3A-6B=X+A$，即 $2X=-2A+6B$，

$$X=-A+3B=\begin{bmatrix}-2 & -1\\ 3 & -5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3 & 12\\ -12 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 11\\ -9 & -5\end{bmatrix}.$$

18. $A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 2\end{bmatrix}$，則 $(A+B)(A-B)-(A^2-B^2)=$____________ .

解答 $\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}$

解析 $AB=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -2\\ 2 & 4\end{bmatrix}$，$BA=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 3\end{bmatrix}$，

使 $(A+B)(A-B)-(A^2-B^2)=(A^2+BA-AB-B^2)-A^2+B^2$

$$=BA-AB=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & -2\\ 2 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix},$$

$$\therefore (A+B)(A-B)-(A^2-B^2)=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}.$$

19. 設 $A=\begin{bmatrix}3 & 6\\ 12 & 9\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}4 & -4\\ 8 & -8\end{bmatrix}$，$C=\begin{bmatrix}4 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$，$I=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$，則

(1) $(A+B)-2(A-C)+3(A-2I)=$____________ .

(2) 若方陣 X 使 $2(A-B)+3(B+X)+4(C-X)=5I$，則 $X=$____________ .

解答 (1) $\begin{bmatrix}12 & 8\\ 32 & 6\end{bmatrix}$;(2) $\begin{bmatrix}21 & 8\\ 32 & 9\end{bmatrix}$

解析 (1) $(A+B)-2(A-C)+3(A-2I)=A+B-2A+2C+3A-6I=2A+B+2C-6I$

$$=\begin{bmatrix}6 & 12\\ 24 & 18\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4 & -4\\ 8 & -8\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}8 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-6 & 0\\ 0 & -6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}12 & 8\\ 32 & 6\end{bmatrix}.$$

(2) $2(A-B)+3(B+X)+4(C-X)=5I$ 時，$2A-2B+3B+3X+4C-4X=5I$

即 $-X=5I-2A-B-4C$，亦即 $X=-5I+2A+B+4C$，

所以 $X=\begin{bmatrix}-5 & 0\\ 0 & -5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}6 & 12\\ 24 & 18\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4 & -4\\ 8 & -8\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}16 & 0\\ 0 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}21 & 8\\ 32 & 9\end{bmatrix}$.

20. 兩矩陣 $A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 5\\ -4 & -1 & 2\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}2 & 1 & 3\\ 5 & 2 & -3\end{bmatrix}$, 若矩陣 X 與 Y 滿足 $3X+2Y=3A+4B$ 且 $2X+3Y=B-3A$，

則 (1) $X=$____________ .　(2) $Y=$____________ .

解答 (1) $\begin{bmatrix}4 & 5 & 21\\ -2 & 1 & 0\end{bmatrix}$;(2) $\begin{bmatrix}-2 & -4 & -18\\ 7 & 1 & -3\end{bmatrix}$

解析 當 $\begin{cases}3X+2Y=3A+4B \cdots\cdots ①\\ 2X+3Y=-3A+B \cdots\cdots ②\end{cases}$ 時，由① × 3 − ② × 2，

得 $5X=15A+10B \Rightarrow A=3A+2B=\begin{bmatrix}0 & 3 & 15\\ -12 & -3 & 6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4 & 2 & 6\\ 10 & 4 & -6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 5 & 21\\ -2 & 1 & 0\end{bmatrix}$,

② × 3 可得 $-5Y=15A+5B$

$$\Rightarrow Y=-3A-B=\begin{bmatrix}0 & -3 & -15\\ 12 & 3 & -6\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2 & 1 & 3\\ 5 & 2 & -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & -4 & -18\\ 7 & 1 & -3\end{bmatrix}.$$

21.設方陣 $A=\begin{bmatrix}2&1\\2&3\end{bmatrix}$，$I_2$ 爲單位方陣，O 爲零方陣，則

(1)$A^2=$_____________ .(2)若 a，b 爲實數且 $A^2+aA+bI_2=O$，則$(a，b)=$_____________ .

解答 (1)$\begin{bmatrix}6&5\\10&11\end{bmatrix}$;(2)$(-5，4)$

解析 (1)$A=\begin{bmatrix}2&1\\2&3\end{bmatrix}$，$A^2=\begin{bmatrix}2&1\\2&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1\\2&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6&5\\10&11\end{bmatrix}$.

(2)$A^2+aA+bI_2=O$ 時，$\begin{bmatrix}6&5\\10&11\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2a&a\\2a&3a\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}b&0\\0&b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6+2a+b&5+a\\10+2a&11+3a+b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$，

即$\begin{cases}2a+b=-6\\5+a=0\\10+2a=0\\11+3a+b=0\end{cases}$，可得 $a=-5$，$b=4$. 可用公式: $A^2-(2+3)A+(2\times3-2\times1)I=O$

22.設二階方陣 $A=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}$，$I=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$，則 $A^2-5A+2I=$_____________ .

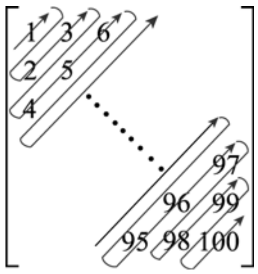
解答 $\begin{bmatrix}4&0\\0&4\end{bmatrix}$

解析 $A=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}$時，$A^2=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7&10\\15&22\end{bmatrix}$，

$A^2-5A+2I=\begin{bmatrix}7&10\\15&22\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}5&10\\15&20\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&0\\0&4\end{bmatrix}$.

可用公式: $A^2-(2+3)A+(2\times3-2\times1)I=O$

23.將 1，2，⋯，100 等 100 個正整數，依下列方式排成一 10 階方陣：

$[a_{ij}]_{10\times10}=$ 

(1)試求 $a_{58}=$_____________ . (2) 25 的所在位置爲=_____________ .

解答 (1)70;(2) a_{44}

解析 (1) $a_{11}=1$，$a_{12}=1+2$，$a_{13}=1+2+3$，⋯，$a_{1,10}=1+2+\cdots+10=55$，

$a_{10,2}=56$，$a_{93}=57$，$a_{84}=58$，⋯，$a_{2,10}=64$，$a_{10,3}=65$，$a_{94}=66$，

$a_{85}=67$，$a_{76}=68$，$a_{67}=69$，$a_{58}=70$.

(2) $a_{16}=1+2+3+4+5+6=21$，$a_{71}=22$，$a_{62}=23$，$a_{53}=24$，$a_{44}=25$.

24.設$\begin{cases}x=2u+3v-w\\y=u+v-w\\z=-u+2v+w\end{cases}$，$\begin{cases}u=a-b+c\\v=2a+b-c\\w=3a+2b-5c\end{cases}$，若 P 爲三階方陣且$\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=P\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}$，試求 $P=$_____________ .

解答 $\begin{bmatrix} 5 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & 5 \\ 6 & 5 & -8 \end{bmatrix}$

解析 $\begin{cases} x = 2u+3v-w \\ y = u+v-w \\ z = -u+2v+w \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$，又$\begin{cases} u = a-b+c \\ v = 2a+b-c \\ w = 3a+2b-5c \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$,

得$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & 5 \\ 6 & 5 & -8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$. 故$P = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & 5 \\ 6 & 5 & -8 \end{bmatrix}$.

25.設$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，$J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, 已知$(I+\frac{1}{3}J)^{10} = aI+bJ$，其中$a$，$b$爲實數, 則數對$(a,b)$ =______ .

解答 (1，341)

解析 $\because J^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} = 3J, J^3 = J^2J = 3J^2 = 3^2J, ... \Rightarrow J^n = 3^{n-1}J$,

二項式定理

$\therefore (I+\frac{1}{3}J)^{10} = C_0^{10}I + C_1^{10}(\frac{1}{3}J) + C_2^{10}(\frac{1}{3})^2J^2 + \cdots + C_{10}^{10}(\frac{1}{3})^{10}J^{10} = I + \frac{1}{3}(C_1^{10}+C_2^{10}+\cdots+C_{10}^{10})J$.

$\therefore a = 1$，$b = \frac{1}{3}(C_1^{10}+C_2^{10}+\cdots+C_{10}^{10}) = \frac{1}{3}(2^{10}-1) = 341$，$\therefore (a, b) = (1, 341)$.

公式：$C_0^n + C_1^n + C_2^n + \cdots + C_{10}^n = 2^n$

26.設$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，若$A^{10} = \begin{bmatrix} 1 & \ell & m \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，則$\ell+m+n =$__________ .

解答 250

解析 設$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = I+B$，其中$B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow B^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，$B^3 = O$，$B^4 = O$，$\cdots$，$B^n = O$，$n \ge 3$，

$\therefore A^{10} = (I+B)^{10} = C_0^{10}I + C_1^{10}B + C_2^{10}B^2 + C_3^{10}B^3 + \cdots + C_{10}^{10}B^{10} = I + 10B + 45B^2$

$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + 10\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + 45\begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 20 & 210 \\ 0 & 1 & 20 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,

$\therefore \ell = 20$，$m = 210$，$n = 20 \Rightarrow \ell+m+n = 250$.

27.設$A = \begin{bmatrix} a & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$，$B = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 3 & b \end{bmatrix}$，若$(A+B)^2 = A^2+2AB+B^2$成立，則$a+b =$__________ .

解答 10

解析 $(A+B)^2=A^2+AB+BA+B^2=A^2+2AB+B^2$，得 $AB=BA$，

$$AB=\begin{bmatrix}a&2\\3&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6&2\\3&b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6a+6&2a+2b\\30&6+4b\end{bmatrix},$$

$$BA=\begin{bmatrix}6&2\\3&b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&2\\3&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6a+6&20\\3a+3b&6+4b\end{bmatrix}$$，由 $AB=BA$，知 $a+b=10$.

28.若 $A=\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}$，則滿足 $X^2=A^2$ 的 $X=$____________ .

解答 $\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}1&2\\2&1\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}-1&-2\\-2&-1\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}-2&-1\\-1&-2\end{bmatrix}$

解析 設 $X=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$，由 $X^2=A^2$ 即 $\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&4\\4&5\end{bmatrix}$，

得 $\begin{cases}a^2+bc=5\cdots\cdots①\\b(a+d)=4\cdots\cdots②\\c(a+d)=4\cdots\cdots③\\bc+d^2=5\cdots\cdots④\end{cases}$，由②③得 $b=c$ 且 $a+d\neq 0$，由①④得 $a^2-d^2=0$，故 $a=d$，

再由①②得 $\begin{cases}a^2+b^2=5\\2ab=4\end{cases}$，解得 $(a,\ b)=(2,\ 1),\ (1,\ 2),\ (-1,\ -2),\ (-2,\ -1)$，

故所求 $X=\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}1&2\\2&1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}-1&-2\\-2&-1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}-2&-1\\-1&-2\end{bmatrix}$.

29.(1)設二階方陣 A 滿足 $A\begin{bmatrix}7\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix},\ A\begin{bmatrix}9\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\5\end{bmatrix}$，求 $A=$____________ .

(2)承(1)，若 $A=\begin{bmatrix}2&1\\1&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&c\\b&d\end{bmatrix}$，則 $(a,b,c,d)=$____________ .

解答 (1) $\begin{bmatrix}5&-11\\-11&26\end{bmatrix}$;(2) $(4,-3,-9,7)$

解析 由 $A\begin{bmatrix}7\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$，$A\begin{bmatrix}9\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\5\end{bmatrix}$，得 $A\begin{bmatrix}7&9\\3&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1\\1&5\end{bmatrix}$，

SOL 一:

(1)設 $A=\begin{bmatrix}p&q\\r&s\end{bmatrix}$，由 $A\begin{bmatrix}7\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}7p+3q=2\\7r+3s=1\end{cases}$，$A\begin{bmatrix}9\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\5\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}9p+4q=1\\9r+4s=5\end{cases}$，

$\Rightarrow\begin{cases}p=5\\q=-11\\r=-11\\s=26\end{cases}$，即 $A=\begin{bmatrix}5&-11\\-11&26\end{bmatrix}$

(2)由 $A=\begin{bmatrix}2&1\\1&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&c\\b&d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&-11\\-11&26\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}2a+b=5\\a+5b=-11\\2c+d=-11\\c+5d=26\end{cases}\begin{cases}a=4\\b=-3\\c=-9\\d=7\end{cases}$

SOL 二(反矩陣作法)

(1)所以 $A=\begin{bmatrix}2&1\\1&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7&9\\3&4\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}2&1\\1&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4&-9\\-3&7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&-11\\-11&26\end{bmatrix}$.

(2)由 $A=\begin{bmatrix}2&1\\1&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&c\\b&d\end{bmatrix}$,

$\begin{bmatrix}a&c\\b&d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1\\1&5\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}5&-11\\-11&26\end{bmatrix}=\frac{1}{9}\begin{bmatrix}5&-1\\-1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5&-11\\-11&26\end{bmatrix}=\frac{1}{9}\begin{bmatrix}36&-81\\-27&63\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&-9\\-3&7\end{bmatrix}$

$\Rightarrow a=4,\ b=-3,\ c=-9,\ d=7$.

30.設 M 為一 3×2 矩陣，而且 $M\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&0\\2&0\\1&0\end{bmatrix}$，$M\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&4\\0&5\\0&6\end{bmatrix}$，則 $M\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}=$＿＿＿＿＿＿＿ .

解答 $\begin{bmatrix}4&3\\5&2\\6&1\end{bmatrix}$

解析 $M\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\2\\1\end{bmatrix}$，$M\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\5\\6\end{bmatrix}$，得 $M\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&3\\5&2\\6&1\end{bmatrix}$.

31.設矩陣 $A=(a_{ij})_{3\times 3}$，$a_{ij}\in\{-2，-1，0，1，2\}$，$\forall i$，$j=1，2，3$，

(1)若 A 滿足 $A^t=A$，則此種 A 共有＿＿＿＿個 . (2)若 A 滿足 $A^t=-A$，則此種 A 共有＿＿＿＿個 .

解答 (1) 15625;(2) 125

解析 (1) $A^t=A$，此矩陣叫對稱矩陣，呈 $\begin{bmatrix}a&b&c\\b&d&e\\c&e&f\end{bmatrix}$ 之型式，即對於主對角線成對稱，故須決定

僅有 a，b，c，d，e，f 共 6 個 ，而左下角亦為 $b,c,e\Rightarrow$ 此種 A 共有 $5^6=15625$ 個 .

(2) $A^t=-A$，此矩陣叫反對稱矩陣，呈 $\begin{bmatrix}0&a&b\\-a&0&c\\-b&-c&0\end{bmatrix}$ 之型式，即主對角線均為 0，而上半

三角形與下半三角形異號，故須決定僅有 a，b，c 共 3 個 $\Rightarrow$ 此種 A 共有 $5^3=125$ 個 .

32.設矩陣 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，$n\in\mathbb{N}$，其中 $a_{ij}=i^2+ij+j^2$，$\forall i,j=1,2,\cdots,n$，則 A 中所有元的總和 $S=$＿＿＿＿.

解答 $\frac{1}{12}n^2(n+1)(11n+7)$

解析 $A=\begin{bmatrix}1^2+1\times1+1^2&1^2+1\times2+2^2&\cdots\cdots&1^2+1\times n+n^2\\2^2+2\times1+1^2&2^2+2\times2+2^2&\cdots\cdots&2^2+2\times n+n^2\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\n^2+n\times1+1^2&n^2+n\times2+2^2&\cdots\cdots&n^2+n\times n+n^2\end{bmatrix}$，

第一行：一次 $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$，1 次 $1+2+3+\cdots+n$，n 個 1^2

第二行：一次 $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$，2 次 $1+2+3+\cdots+n$，n 個 2^2

第三行：一次 $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$，3 次 $1+2+3+\cdots+n$，n 個 3^2

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

第n行：一次$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$ ，n次$1+2+3+\cdots+n$ ，n個n^2

各行由上往下相加

$S=n(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)+(1+2+3+\cdots+n)\times(1+2+3+\cdots+n)+n(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)$

$=n\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{1}{2}n(n+1)\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+n\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

$=\frac{1}{12}n^2(n+1)[4(2n+1)+3(n+1)]=\frac{1}{12}n^2(n+1)(11n+7)$.