高雄市明誠中學 高二數學平時測驗 日期：101.04.24					
範圍	2-3.3-1 三元一次方程組+矩陣列運算	班級	二年____班	姓名	
		座號			

一、填充題 (每題 10 分)

1.利用矩陣的列運算解一次方程組 $\begin{cases} 3x-2y-z=6 \\ x-3y+2z=-5 \\ 2x-8y+5z=-15 \end{cases}$. 則 $(x,\ y,\ z)=$______________________。

解答 $x=3$， $y=2$， $z=-1$

解析 增廣矩陣為 $\begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 & 6 \\ 1 & -3 & 2 & -5 \\ 2 & -8 & 5 & -15 \end{bmatrix}$ 互換 $\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & -5 \\ 3 & -2 & -1 & 6 \\ 2 & -8 & 5 & -15 \end{bmatrix} \times(-3)\ \times(-2)$

$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & -5 \\ 0 & 7 & -7 & 21 \\ 0 & -2 & 1 & -5 \end{bmatrix} \times\frac{1}{7} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & -5 \end{bmatrix} \times 3\ \times 2 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \times(-1)$

$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \times 1\ \times 1 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, $\therefore x=3$， $y=2$， $z=-1$.

2.解 x， y， z 三元一次聯立方程組 $\begin{cases} x-3y+2z=1 \\ x-4y-5z=2 \\ x-2y+9z=7 \end{cases}$. 則 $(x,\ y,\ z)$ 解為______________________。

解答 無解

解析 $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & -5 & 2 \\ 1 & -2 & 9 & 7 \end{bmatrix} \times(-1)\ \times(-1) \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -7 & 1 \\ 0 & 1 & 7 & 6 \end{bmatrix} \times 1 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$，無解 .

3.利用矩陣的列運算解一次方程組 $\begin{cases} x+2y-z=7 \\ 2x-y+3z=4 \\ 3x-4y+7z=1 \end{cases}$. 則 $(x,\ y,\ z)=$______________________。

解答 $(x,\ y,\ z)=(3-t,\ 2+t,\ t)$， $t\in\mathbb{R}$

解析 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 7 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \\ 3 & -4 & 7 & 1 \end{bmatrix} \times(-2)\ \times(-3) \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & -5 & 5 & -10 \\ 0 & -10 & 10 & -20 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \times(\frac{-1}{5}) \\ \times(\frac{-1}{10}) \end{matrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \times(-2)\ \times(-1)$

$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow$ 矩陣所表示之方程組為 $\begin{cases} x+z=3 \\ y-z=2 \\ 0=0 \end{cases}$，故方程組有無限多解，

$\therefore$ 其解為 $(x, y, z)=(3-t, 2+t, t)$， $t\in\mathbb{R}$.

4.若方程組$\begin{cases}3x+y+z=k+3\\x+3y-3z=k+7\\x-y+2z=1-k\end{cases}$有解，試求出

(1) k 值爲______，(2)並求其解$(x,\ y,\ z)=$____________。.

解答 (1)3; (2)$(x,\ y,\ z)=(-3t+1,\ 5t+3,\ 4t)$，$t\in\mathbb{R}$

解析 (1)$\begin{bmatrix}3&1&1&k+3\\1&3&-3&k+7\\1&-1&2&1-k\end{bmatrix}$互換$\to\begin{bmatrix}1&3&-3&k+7\\3&1&1&k+3\\1&-1&2&1-k\end{bmatrix}$×(−3) ×(−1)

$\to\begin{bmatrix}1&3&-3&k+7\\0&-8&10&-2k-18\\0&-4&5&-6-2k\end{bmatrix}\times(\frac{-1}{2})\to\begin{bmatrix}1&3&-3&k+7\\0&4&-5&k+9\\0&-4&5&-6-2k\end{bmatrix}$×1

$\to\begin{bmatrix}1&3&-3&k+7\\0&4&-5&k+9\\0&0&0&3-k\end{bmatrix}$有解 $\Rightarrow 3-k=0$，得$k=3$.

(2)令$z=4t\Rightarrow y=5t+3$，$x=-3t+1$，$t\in\mathbb{R}$，∴其解爲$(x,\ y,\ z)=(-3t+1,\ 5t+3,\ 4t)$，$t\in\mathbb{R}$.

5.將$\begin{cases}3x-2y=4\\2x-3z=5\\x-y+z=6\end{cases}$以增廣矩陣的形式表示爲____________________.

解答 $\begin{bmatrix}3&-2&0&4\\2&0&-3&5\\1&-1&1&6\end{bmatrix}$

6.設$A=[a_{ij}]_{3\times2}$且$a_{ij}=i^2+j$，試求出A爲____________________.

解答 $A=\begin{bmatrix}2&3\\5&6\\10&11\end{bmatrix}$

解析 $a_{ij}=i^2+j\Rightarrow a_{11}=1^2+1=2,a_{12}=1^2+2=2,\ldots\ldots,a_{31}=3^2+1=10,a_{32}=3^2+2=11$

7.矩陣$\begin{bmatrix}1&1&1&4\\1&2&2&6\\2&3&4&11\end{bmatrix}$經過列運算後得$\begin{bmatrix}1&1&1&4\\0&1&1&h\\0&0&1&k\end{bmatrix}$，試問$h$，$k$的值________________.

解答 $h=2$，$k=1$

解析 $\begin{bmatrix}1&1&1&4\\1&2&2&6\\2&3&4&11\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1&4\\0&1&1&2\\0&1&2&3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1&4\\0&1&1&2\\0&0&1&1\end{bmatrix}$，得$h=2$，$k=1$.

8.一個三位數，百位數字與個位數字和等於十位數字，若將百位數字與十位數字交換，所得新數比原數大 450；若將原數的十位數字與個位數字交換，所得新數較原數小 36，求此三位數爲_________.

解答 495

解析 設百位數字，十位數字，個位數字分別是 x，y，z，依題意

$$\begin{cases} x+z=y \\ (100x+10y+z)-(100y+10x+z)=-450 \\ (100x+10y+z)-(100x+10z+y)=36 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y+z=0 \\ x-y=-5 \\ y-z=4 \end{cases}$$，$x=4$，$y=9$，$z=5$，原數 495．

9.已知三種合金 A， B， C 的金、銀、銅成分的重量比例分別是 $3:4:1$， $2:1:5$ 與 $4:3:1$，今想以 A，B，C 三種合金製成另一合金 12 公兩，且使得金、銀、銅所含的重量相同，試問 A 合金需多少公兩？__________公兩。

解答 6

解析 設所需的 A，B，C 的重量各為 x，y，z 公兩，

$$\begin{cases} \frac{3}{8}x+\frac{2}{8}y+\frac{4}{8}z=4 \\ \frac{4}{8}x+\frac{1}{8}y+\frac{3}{8}z=4 \\ \frac{1}{8}x+\frac{5}{8}y+\frac{1}{8}z=4 \end{cases} \to \begin{cases} 3x+2y+4z=32 \\ 4x+y+3z=32 \\ x+5y+z=32 \end{cases}$$，得 $x=6$，故 A 需 6 公兩．

10.對矩陣 $\begin{bmatrix} 3 & 8 & a \\ 4 & 9 & b \end{bmatrix}$ 作列運算若干次後得到 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$，求 (a,b) 之值為______________。

解答 $(11,13)$

解析 $\begin{bmatrix} 3 & 8 & a \\ 4 & 9 & b \end{bmatrix}$ 所代表方程組為 $\begin{cases} 3x+8y=a \\ 4x+9y=b \end{cases}$，經若干次列運算得 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$，

表方程組的解 $(x,\ y)=(1,\ 1)$，代入 $\begin{cases} 3x+8y=a \\ 4x+9y=b \end{cases}$，得 $\begin{cases} 3+8=a \\ 4+9=b \end{cases}$，故 $(a,b)=(11,13)$ ．

11.下列哪些矩陣所代表的 x，y，z 的線性方程組恰有一解？______________

(1) $\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right]$ (2) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$ (3) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$ (4) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

(5) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$ (6) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$．

解答 (1)(2)(5)(6)

解析 (1)有唯一解 $(x,\ y,\ z)=(2,\ 1,\ -3)$ ．

(2)矩陣所代表方程組為 $\begin{cases} x+2y+3z=7 \\ y+2z=3 \\ z=0 \end{cases}$，故唯一解 $(x,\ y,\ z)=(1,\ 3,\ 0)$ ．

(3)矩陣第三列表方程式 $0\cdot z=1$，故方程組無解．

(4)無限多解．

(5)矩陣所代表方程組為 $\begin{cases} x+2y+3z=0 \\ y+2z=0 \\ z=0 \end{cases}$，故有唯一解 $(x,\ y,\ z)=(0,\ 0,\ 0)$ ．

(6)前 3 式有唯一解 $(x,\ y,\ z)=(3,\ -1,\ 2)$ ．代入第 4 式 $0x+0y+0z=0$ 滿足

12.設方程組$\begin{cases}x+z=5\\x+2y-z=3\\2x+y+az=b\end{cases}$，試就實數$a, b$的值，討論方程組的解，有解時並求其解．（提示：利用高斯消去法或矩陣列運算判斷方程組的解）

解答　見解析

解析　$\begin{bmatrix}1&0&1&5\\1&2&-1&3\\2&1&a&b\end{bmatrix}\xrightarrow{(-1),(-2)}\begin{bmatrix}1&0&1&5\\0&2&-2&-2\\0&1&-2+a&-10+b\end{bmatrix}\leftarrow(\frac{1}{2})$

$\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&1&5\\0&1&-1&-1\\0&1&-2+a&-10+b\end{bmatrix}(-1)\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&1&5\\0&1&-1&-1\\0&0&-1+a&-9+b\end{bmatrix}$，

最後矩陣代表方程組爲$\begin{cases}x+z=5\\y-z=-1\\(a-1)z=-9+b\end{cases}$，因此

(1)當$a=1$且$b\neq9$時，方程組無解．

(2)當$a\neq1$時，方程組有唯一解，此時$\begin{cases}x+z=5\\y-z=-1\\(a-1)z=-9+b\end{cases}$，

故$\begin{cases}x=5-z\\y=-1+z\\z=\dfrac{-9+b}{a-1}\end{cases}$，得$\begin{cases}x=5-\dfrac{-9+b}{a-1}=\dfrac{5a-b+4}{a-1}\\y=-1+\dfrac{-9+b}{a-1}=\dfrac{-a+b-8}{a-1}\\z=\dfrac{b-9}{a-1}\end{cases}$．

(3)當$a=1$且$b=9$時，方程組有無限多解，此時$\begin{cases}x+z=5\\y-z=-1\end{cases}$，解$\begin{cases}x=5-t\\y=-1+t\\z=t\end{cases}$，$t$爲任意實數．

13.就實數a, b, c討論方程組$\begin{cases}x+2y+az=1\\3x+4y+bz=-1\\2x+10y+7z=c\end{cases}$的解．當________________時，方程組有無限多解。

解答　$7-11a+3b=0$且$c=14$

解析　$\begin{bmatrix}1&2&a&1\\3&4&b&-1\\2&10&7&c\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&2&a&1\\0&-2&b-3a&-4\\0&6&-2a+7&-2+c\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&2&a&1\\0&-2&b-3a&-4\\0&0&7-11a+3b&-14+c\end{bmatrix}$

$\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&b-2a&-3\\0&-2&b-3a&-4\\0&0&7-11a+3b&-14+c\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&b-2a&-3\\0&1&\dfrac{3a-b}{2}&2\\0&0&7-11a+3b&-14+c\end{bmatrix}$．

當$7-11a+3b=0$且$c=14$時，方程組有無限多解

14.若兩方程組$\begin{cases} x+y+z=6 \\ x-2y+2z=3 \\ 2x-3y=-4 \end{cases}$與$\begin{cases} ax+by+cz=5 \\ bx+cy+az=6 \\ cx+ay+bz=1 \end{cases}$有相同的解，則序組$(a，b，c)=$＿＿＿＿＿＿．

解答 (1，－1，2)

解析 由$\begin{cases} x+y+z=6 & \cdots\cdots① \\ x-2y+2z=3 & \cdots\cdots② \\ 2x-3y=-4 & \cdots\cdots③ \end{cases}$，①×2－②得 $x+4y=9$……④，

③－④×2 得 $-11y=-22 \Rightarrow y=2$，代入④得 $x=1$，代入①得 $z=3$，

將 $x=1$，$y=2$，$z=3$ 代入第二個方程組得$\begin{cases} a+2b+3c=5 \\ b+2c+3a=6 \\ c+2a+3b=1 \end{cases}$

$\Rightarrow$ 三式相加，得 $6(a+b+c)=12 \Rightarrow a+b+c=2$，$\therefore \begin{cases} b+2c=3 \\ c+2a=4 \\ a+2b=-1 \end{cases}$ 解得 $a=1$，$b=-1$，$c=2$．

15.一容量爲 100 立方公尺的水池，由 A，B 兩管注水，而由 C 管放水，若三管齊開，則由水滿池至水乾需 3 小時，若只開 A，C 兩管，則 1 小時水乾，若只開 B，C 兩管，則只需 45 分鐘水乾，若 A 管每小時注水量爲 a 立方公尺，B 管每小時注水量爲 b 立方公尺，C 管每小時放水量爲 c 立方公尺，則$(a，b，c)=$＿＿＿＿＿＿＿＿＿．

解答 $(100,\dfrac{200}{3}，200)$

解析 設 A，B，C 三管每小時的注（放）水量各爲 x，y，z 立方公尺，

由題意可得方程組$\begin{cases} 100+3(x+y-z)=0 \\ 100+x-z=0 \\ 100+\dfrac{45}{60}(y-z)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x+3y-3z=-100 & \cdots\cdots① \\ x-z=-100 & \cdots\cdots② \\ 3y-3z=-400 & \cdots\cdots③ \end{cases}$，

③代入①得 $3x-400=-100 \Rightarrow x=100$，代入②得 $z=200$，代入③得 $y=\dfrac{200}{3}$，

故 A，B，C 三管每小時的注（放）水量各爲 100，$\dfrac{200}{3}$，200 立方公尺．

16.某公司有甲、乙、丙三條生產線，現欲生產三萬個產品，如果甲、乙、丙三條生產線同時開動，則需 10 小時；如果只開動乙、丙兩條生產線，則需 15 小時；如果只開動甲生產線 15 小時，則需再開動丙生產線 30 小時，才能完成所有產品．問如果只開動乙生產線，則需＿＿＿＿＿＿小時才能生產三萬個產品．

解答 20

解析 設甲生產線需 x 小時可生產三萬個產品，

乙生產線需 y 小時可生產三萬個產品，

丙生產線需 z 小時可生產三萬個產品，

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{10} \\ \frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{15} \\ \frac{15}{x}+\frac{30}{z}=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{x}=\frac{1}{30} \\ \frac{1}{y}=\frac{1}{20} \\ \frac{1}{z}=\frac{1}{60} \end{cases} \Rightarrow y=20$$，∴只開乙需 20 小時．

17.小張正在運算一個三元一次聯立方程組 $\begin{cases} ax+y+2z=10 \\ x+by-2z=-4 \\ -3x+y+cz=-3 \end{cases}$，其中數字 a，b，c 因為不小心沾到油墨汙損了，而且除一個運算過程 $\begin{cases} x+y+z=5 \\ 2y-z=3 \\ \frac{-1}{3}z=\frac{-1}{3} \end{cases}$ 還算完整外，其他過程與結果也都汙損了，小張的運算過程無任何錯誤，請你幫小張找出題目汙損的數字$(a，b，c)$為____________．

解答 $(3,-2,1)$

解析 由 $\begin{cases} x+y+z=5 \\ 2y-z=3 \\ \frac{-1}{3}z=\frac{-1}{3} \end{cases}$，得 $z=1$，$y=2$，$x=2$，代回原方程組 $\Rightarrow \begin{cases} 2a+2+2=10 \\ 2+2b-2=-4 \\ -6+2+c=-3 \end{cases}$，

∴$a=3$，$b=-2$，$c=1$，即$(a，b，c)=(3, -2, 1)$．

18.一礦物內含 A，B，C 三種放射性物質，放射出同一種輻射．已知 A，B，C 每公克分別會釋放出 1 單位，2 單位，1 單位的輻射強度，又知 A，B，C 每過半年其質量分別變為原來質量的 $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ 倍．於一年前測得此礦物的輻射強度為 66 單位，而半年前測得此礦物的輻射強度為 22 單位，且目前此礦物的輻射強度為 8 單位，則目前此礦物中 A，B，C 物質之質量分別為_____，_____，_____公克．

解答 4，1，2

解析 設目前此礦物中 A，B，C 物質之質量分別為 x，y，z 公克

依題意 $\Rightarrow \begin{cases} x+2y+z=8\cdots\cdots① \\ 2x+6y+4z=22\cdots\cdots② \\ 4x+18y+16z=66\cdots\cdots③ \end{cases}$，

②−①×2 得 $2y+2z=6$，③−①×4 得 $10y+12z=34$，解得 $y=1$，$z=2$，代入①得 $x=4$，

故 A，B，C 物質之質量分別為 4，1，2 公克．

19.已知方程組$(L)\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases}$ 恰有一組解(3，4，5)，若方程組$(L')\begin{cases} (2a_1+3b_1)x+4b_1y+c_1z=d_1 \\ (2a_2+3b_2)x+4b_2y+c_2z=d_2 \\ (2a_3+3b_3)x+4b_3y+c_3z=d_3 \end{cases}$ 的解為$(\alpha，\beta，\gamma)=$____________．

解答 $(\frac{3}{2},\frac{17}{8},5)$

解析

方程組(L')中，$\begin{cases}(2a_1+3b_1)x+4b_1y+c_1z=d_1\\(2a_2+3b_2)x+4b_2y+c_2z=d_2\\(2a_3+3b_3)x+4b_3y+c_3z=d_3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_1(2x)+b_1(3x+4y)+c_1z=d_1\\a_2(2x)+b_2(3x+4y)+c_2z=d_2\\a_3(2x)+b_3(3x+4y)+c_3z=d_3\end{cases}$，

$\therefore\begin{cases}2x=3\\3x+4y=4\\z=5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{3}{2}\\y=-\dfrac{1}{8}\\z=5\end{cases}$．$(\alpha，\beta，\gamma)=(\dfrac{3}{2},-\dfrac{1}{8},5)$

20.設 k 為實數，若方程組$\begin{cases}x+2y+z=-1\\x-2y-3z=1\\3x+2y-z=\lambda\end{cases}$有解，則 λ 之值為____________．

解答 -1

解析 $\because\Delta=\begin{vmatrix}1&2&1\\1&-2&-3\\3&2&-1\end{vmatrix}=0$，$\therefore$原方程組有解，必是無限多組解（三平面重合或相交一直線）

20.設 k 為一正數，且方程組$\begin{cases}x-y+z=0\\3x-ky+5z=0\\kx+3y+2z=0\end{cases}$有 $x=y=z=0$ 以外的解，則

(1) $k=$____________．（$k>0$）

(2)若 $x=a$，$y=b$，$z=c$ 為上述方程組一組實數解，則 $a^2+b^2+c^2-6a+2c+2$ 最小值為____________．

解答 (1) 7;(2)$-\dfrac{13}{6}$

解析 (1) $\Delta=\begin{vmatrix}1&-1&1\\3&-k&5\\k&3&2\end{vmatrix}=k^2-7k=k(k-7)=0$，$\therefore k=0$（不合）或 7．

(2) $\begin{cases}x-y+z=0\\3x-7y+5z=0\\7x+3y+2z=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-t\\y=t\\z=2t\end{cases}$，$t\in\mathbb{R}$，$\therefore(a，b，c)=(-t，t，2t)$，

$\therefore a^2+b^2+c^2-6a+2c+2=6t^2+10t+2=6(t+\dfrac{5}{6})^2-\dfrac{13}{6}$，$\therefore$最小值$=-\dfrac{13}{6}$．

21.設 $xyz\neq0$，若$\begin{cases}3x-4y+3z=0\\4x-5y+5z=0\end{cases}$，則$\dfrac{x^2+y^2+z^2}{xy+yz+zx}$之值為____________．

解答 5

解析 $\begin{cases}3x-4y+3z=0\\4x-5y+5z=0\end{cases}$，$\therefore x:y:z=\begin{vmatrix}-4&3\\-5&5\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}3&3\\5&4\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}3&-4\\4&-5\end{vmatrix}=5:3:-1$．

令 $x=5t$，$y=3t$，$z=-t$，則$\dfrac{x^2+y^2+z^2}{xy+yz+zx}=\dfrac{25t^2+9t^2+t^2}{15t^2-3t^2-5t^2}=\dfrac{35}{7}=5$．

22.已知方程組$\begin{cases} kx+y+z=k \\ x+ky+z=k \\ x+y+kz=k \end{cases}$無解，則 1)無解時，$k=$__________．　(2)無限多組解時，$k=$__________．

解答　$(1)-2;(2)1$

解析　$\Delta=\begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} k+2 & 1 & 1 \\ k+2 & k & 1 \\ k+2 & 1 & k \end{vmatrix}=(k+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{vmatrix}=(k+2)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & k-1 & 0 \\ 1 & 0 & k-1 \end{vmatrix}$

$=(k+2)(k-1)^2=0 \Rightarrow k=1$或$-2$．

(1)當$k=1$時，方程組$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+y+z=1 \\ x+y+z=1 \end{cases}$有無限多解．

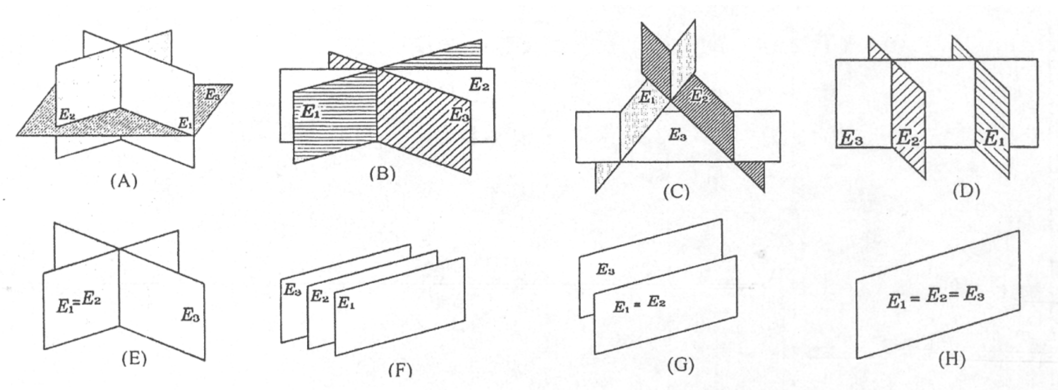
(2)當$k=-2$時，方程組$\begin{cases} -2x+y+z=-2 \\ x-2y+z=-2 \\ x+y-2z=-2 \end{cases}$，

兩兩相減化簡得$x=y=z$，代回得$0=-2$，矛盾，故無解．

23.請填入下列各聯立方程組所表示的圖形分別爲(A)～(H)圖形中的哪一個，以代號填入，並判斷聯立方程組的解爲(甲)恰有一解，(乙)無解，(丙)無限多組解，如$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+y+z=1 \\ x+y+z=1 \end{cases}$，答案爲(H)和(丙)．

(1)$\begin{cases} x-3y+2z=1 \\ 2x+5y-z=3 \\ x-3y+2z=0 \end{cases}$__________．(2)$\begin{cases} x-y+z=2 \\ 2x+y-z=1 \\ 2x+y+z=7 \end{cases}$__________．(3)$\begin{cases} x+y+2z=2 \\ 2x+y+z=2 \\ x+2y+5z=2 \end{cases}$__________．

(4)$\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+2y+2z=2 \\ 3x-y-z=4 \end{cases}$__________．(5)$\begin{cases} 2x+y+2z=1 \\ 2x+y+2z=3 \\ 4x+2y+4z=0 \end{cases}$__________．



解答　(1) D，乙;(2) A，甲;(3) C，乙;(4) E，丙;(5) F，乙

解析　(1)$\because\begin{cases} x-3y+2z=1 \\ x-3y+2z=0 \end{cases}$兩平面平行且$2x+5y-z=3$與其他二平面不平行，填(D)(乙)無解．

(2) $\begin{cases} x-y+z=2\cdots\cdots① \\ 2x+y-z=1\cdots\cdots② \\ 2x+y+z=7\cdots\cdots③ \end{cases}$，①+②得 $3x=3 \Rightarrow x=1 \Rightarrow \begin{cases} -y+z=1 \\ y+z=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=2 \\ z=3 \end{cases}$，

恰一組解，填(A)(甲)恰有一解．

(3) $\begin{cases} x+y+2z=2 \\ 2x+y+z=2 \\ x+2y+5z=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-z=0 \\ y+3z=2 \\ 0=-2 \end{cases} \Rightarrow$ 無解，填(C)(乙)無解（∵三平面法向量皆不平行）．

(4) $\begin{cases} x+y+z=1\cdots\cdots① \\ 2x+2y+2z=2\cdots\cdots② \\ 3x-y-z=4\cdots\cdots③ \end{cases}$，①②表兩平面重合，與第三平面不平行，填(E)(丙)無限多解．

(5) $\begin{cases} 2x+y+2z=1 \\ 2x+y+2z=3 \\ 4x+2y+4z=0 \end{cases}$ 三平面平行，填(F)(乙)無解．