<table>
<tr><td colspan="6">高雄市明誠中學 高二數學平時測驗　　日期：101.04.10</td></tr>
<tr><td rowspan="2">範圍</td><td rowspan="2">2-2 直線方程式</td><td>班級</td><td>二年____班</td><td rowspan="2">姓名</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>座號</td><td></td></tr>
</table>

一、填充題　(每題 10 分)

1.設 $A(4，1，3)$，$B(6，4，3)$，$C(2，0，3)$為空間中三點，平面 $E：x+y-2z+4=0$，

(1)向量 $\overrightarrow{AB}$ 與 x 軸，y 軸，z 軸正向的夾角分別為 α，β，γ，則 $\cos\alpha=$____________ .

(2)$\triangle ABC$ 的重心坐標為________________ .

(3)設 $P\in\overline{AB}$ 且 $\overline{AP}：\overline{PB}=2：5$，則 P 點坐標為________________ .

(4)$\triangle ABC$ 的面積為____________ .

(5)過 A，B，C 三點的平面方程式為___________________ .

(6)設平面 ABC 與平面 E 的夾角為 θ，則 $\sin\theta=$____________ .

(7)$\triangle ABC$ 在平面 E 上的正射影的面積為____________ .

(8)點 $D(2，-2，3)$在平面 E 上的正射影為_________________ .

(9)點 $D(2，-2，3)$對於平面 E 的對稱點坐標為_________________ .

解答 (1)$\frac{2}{\sqrt{13}}$;(2)$(4，\frac{5}{3}，3)$;(3)$(\frac{32}{7}，\frac{13}{7}，3)$;(4)2;(5)$z-3=0$;

(6)$\frac{\sqrt{3}}{3}$;(7)$\frac{2\sqrt{6}}{3}$;(8)$(\frac{7}{3}，-\frac{5}{3}，\frac{7}{3})$;(9)$(\frac{8}{3}，-\frac{4}{3}，\frac{5}{3})$

解析 (1) $\overrightarrow{AB}=(2，3，0)$，$\cos\alpha=\frac{2}{|\overrightarrow{AB}|}=\frac{2}{\sqrt{13}}$.

(2)重心 $G=(\frac{4+6+2}{3}，\frac{1+4+0}{3}，\frac{3+3+3}{3})=(4，\frac{5}{3}，3)$.

(3)$P\in\overline{AB}$ 且 $\overline{AP}：\overline{PB}=2：5$，$P$ 內分點，

$P=(\frac{4\times5+6\times2}{2+5}，\frac{1\times5+4\times2}{2+5}，\frac{3\times5+3\times2}{2+5})=(\frac{32}{7}，\frac{13}{7}，3)$.

(4) $\overrightarrow{AB}=(2，3，0)$，$\overrightarrow{AC}=(-2，-1，0)$，

$\triangle ABC$ 的面積$=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{13\times5-49}=2$.

(5)設 E_{ABC} 之法向量 $\overrightarrow{n}=(a,\ b,\ c)$，$\overrightarrow{AB}=(2,\ 3,\ 0)$，$\overrightarrow{AC}=(-2,\ -1,\ 0)$，

則$\begin{cases}2a+3b=0\\-2a-b=0\end{cases}\Rightarrow a:b:c=0:0:t$，取 $\overrightarrow{n}=(0,\ 0,\ 1)$，又過 $A(4,\ 1,\ 3)$，$E_{ABC}:z-3=0$.

(6)平面 E 與 E_{ABC} 之法向量分別為 $\overrightarrow{n_1}=(1，1，-2)$及 $\overrightarrow{n_2}=(0，0，1)$，

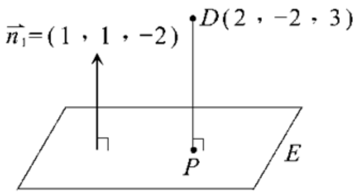
則 $\cos\theta=\pm\frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|}=\pm\frac{-2}{\sqrt{6}\cdot1}=\pm\frac{2}{\sqrt{6}}$，$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\frac{4}{6}}=\sqrt{\frac{2}{6}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

(7)所求= (△ABC 的面積) × $|\cos\theta| = 2\times\dfrac{2}{\sqrt{6}}=\dfrac{4}{\sqrt{6}}=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$.

(8)設點 $D(2，-2，3)$在平面 E 上之正射影為 P，$\overleftrightarrow{DP}$ ：$\begin{cases} x=2+t \\ y=-2+t \\ z=3-2t \end{cases}$，$t\in\mathbb{R}$，

設 $P(2+t，-2+t，3-2t)$，$\because P\in E$,

$\therefore(2+t)+(-2+t)-2(3-2t)+4=0\Rightarrow t=\dfrac{1}{3}$，得 $P(\dfrac{7}{3}，-\dfrac{5}{3}，\dfrac{7}{3})$.



(9)設點 D 關於平面 E 之對稱點為 $Q(x，y，z)$，$\because \overline{DQ}$ 之中點為 P,

$\therefore\begin{cases} \dfrac{x+2}{2}=\dfrac{7}{3} \\ \dfrac{y-2}{2}=-\dfrac{5}{3} \\ \dfrac{z+3}{2}=\dfrac{7}{3} \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x=\dfrac{8}{3} \\ y=-\dfrac{4}{3} \\ z=\dfrac{5}{3} \end{cases}$，即對稱點 Q 之坐標為$(\dfrac{8}{3}，-\dfrac{4}{3}，\dfrac{5}{3})$.

2.(1)求直線$\begin{cases} x+2y=1 \\ z=0 \end{cases}$的參數式為____________________ .

(2)求直線$\begin{cases} x+2y=1 \\ z=0 \end{cases}$與原點(0，0，0)的距離為____________ .

(3)求包含直線$\begin{cases} x+2y=1 \\ z=0 \end{cases}$與過原點(0，0，0)的平面方程式為__________________ .

解答 (1)$\begin{cases} x=1-2t \\ y=t \\ z=0 \end{cases}$，$t\in\mathbb{R}$;(2)$\dfrac{\sqrt{5}}{5}$;(3)$z=0$

解析 (1)由 L：$\begin{cases} x+2y=1 \\ z=0 \end{cases}$，令 $y=t\Rightarrow L$：$\begin{cases} x=1-2t \\ y=t \\ z=0 \end{cases}$，$t\in\mathbb{R}$.

(2)設 $P\in L$，則 $P(1-2t，t，0)$，$\overline{OP}=\sqrt{(1-2t)^2+t^2+0^2}=\sqrt{5t^2-4t+1}=\sqrt{5(t-\dfrac{2}{5})^2+\dfrac{1}{5}}$，

當 $t=\dfrac{2}{5}$時，$\overline{OP}$ 有最小值$\sqrt{\dfrac{1}{5}}$，即 $d(O，L)=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

(3)包含 L：$\begin{cases} E_1：x+2y-1=0 \\ E_2：z=0 \end{cases}$之平面 E，且過 $O(0，0，0)$,

設 E：$z+k(x+2y-1)=0$……①,

$O(0，0，0)$代入 $E\Rightarrow 0-k=0\Rightarrow k=0$ 代入①，得 E：$z=0$.

3.給定一點 $A(1，2，3)$，平面 $E：x+y+z=0$，

(1)過 A 點垂直平面 E 的直線參數式為＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿．

(2) A 點在 E 上的正射影坐標為＿＿＿＿＿＿．

(3) A 點對 E 的對稱點坐標為＿＿＿＿＿＿．

解答　(1) $\begin{cases} x=1+t \\ y=2+t \\ z=3+t \end{cases}$，$t\in\mathbb{R}$；(2)$(-1，0，1)$；(3)$(-3，-2，-1)$

解析　(1)垂直 $E：x+y+z=0$ 之直線方向向量即為 E 的法向量$(1，1，1)$，

此直線過 $A(1，2，3)$，∴直線參數式為 $\begin{cases} x=1+t \\ y=2+t \\ z=3+t \end{cases}$，$t\in\mathbb{R}$．

(2)將(1)的參數式代入 E，$(1+t)+(2+t)+(3+t)=0\Rightarrow t=-2$，

∴直線與 E 的交點為 $B(-1，0，1)$，即為 A 在 E 上的正射影．

(3)設 A 對 E 的對稱點 A'，則 $\overline{AA'}$ 中點 B，$A'(-2-1，0-2，2-3)=(-3，-2，-1)$．

4.直線 $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z-4}{1}$ 在平面 $x+y+az=b$ 上，求數對$(a，b)=$＿＿＿＿＿＿．

解答　$(1，3)$

解析　直線 $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z-4}{1}$ 在平面 $x+y+az=b$ 上，

(1)$(2，-3，1)\perp(1，1，a)\Rightarrow 2-3+a=0\Rightarrow a=1$．

(2)點$(1，-2，4)$在平面上$\Rightarrow 1-2+4a=b\Rightarrow 1-2+4=b\Rightarrow b=3$．

5.過點 $A(1，0，2)$且垂直於直線 $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-3}{1}$ 之平面 E 的方程式為＿＿＿＿＿＿．

解答　$2x+2y+z=4$

解析　平面 E 垂直直線 $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-3}{1}\Rightarrow E$ 的一法向量為$(2，2，1)$，又 $A(1，0，2)$在 E 上，

∴E 之方程式為 $2(x-1)+2(y-0)+1(z-2)=0$，化簡得 $2x+2y+z=4$．

6.試求包含 $A(4，3，1)$及直線 $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-1}{2}$ 之平面方程式為＿＿＿＿＿＿．

解答　$2x-6y+z+9=0$

解析　設所求平面之法向量 $\overrightarrow{n}=(a, b, c)$，取直線 L 上一點 $P(1，2，1)$，∴$\overrightarrow{PA}=(3，1，0)$，

L 方向向量 $\overrightarrow{d}=(2，1，2)\Rightarrow\overrightarrow{PA}\perp\overrightarrow{n}$ 且 $\overrightarrow{d}\perp\overrightarrow{n}\Rightarrow\begin{cases} 3a+b=0 \\ 2a+b+2c=0 \end{cases}\Rightarrow a:b:c=2:(-6):1$，

取 $\overrightarrow{n}=(2, -6, 1)$，又過 $A(4, 3, 1)\Rightarrow 2(x-4)-6(y-3)+(z-1)=0$，

∴包含 A 點及直線 L 之平面方程式為 $2x-6y+z+9=0$．

7.設點 $A(1，4，3)$在平面 $E：3x+2y-2z+12=0$ 之投影點為 B，直線 $L：\frac{x+4}{2}=\frac{y-1}{a}=\frac{z-1}{8}$ 在平面 E 上，點 $P(-4，1，1)$在 L 上，過 B 點作 L 垂線與 L 交於 C 點，求：

(1)B 點坐標=＿＿＿＿＿＿. (2) $a=$＿＿＿＿＿＿. (3) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CP}=$＿＿＿＿＿＿.

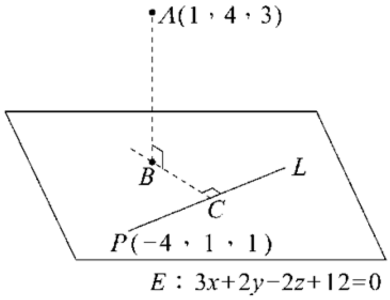
解答 (1)$(-2，2，5)$;(2)5;(3)0

解析 (1)設 $B(1+3t，4+2t，3-2t)$，B 在 E 上，

$\therefore 3(1+3t)+2(4+2t)-2(3-2t)+12=0 \quad \Rightarrow t=-1，\therefore B(-2，2，5)$.

(2)L 在 E 上，$\therefore (2，a，8)\cdot(3，2，-2)=0 \Rightarrow a=5$.

(3) $\overline{AB}\perp\overline{BC}$，$\overline{CP}\perp\overline{BC}$，根據三垂線定理 $\overline{AC}\perp\overline{CP}$，$\therefore \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CP}=0$.



8.設 L：$\dfrac{x-3}{4}=\dfrac{y-1}{5}=\dfrac{z+3}{1}$ 與 M：$\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-k}{3}=\dfrac{z+k}{1}$ 兩直線相交於一點，若平面 E 包含 L 及 M，則：

(1)平面 E 方程式為＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿. (2) $k=$＿＿＿＿＿＿.

解答 (1)$x-y+z=-1$;(2)1

解析 (1)L 之方向向量 $\overrightarrow{d_1}=(4，5，1)$，$M$ 之方向向量 $\overrightarrow{d_2}=(2，3，1)$，$\overrightarrow{d_1}\times\overrightarrow{d_2}=(2，-2，2)$，

設 E：$x-y+z=a$，又 L 上一點$(3，1，-3)$在 E 上，

$\therefore a=3-1-3=-1$，故平面 E 為 $x-y+z=-1$.

(2)又 M 在 E 上，$\therefore M$ 上一點$(1, k, -k)$在 E 上$\Rightarrow 1-k+(-k)=-1 \Rightarrow k=1$.

9.直線 L 通過 $A(-1，4，2)$，$B(-5，-2，0)$兩點，L 對稱比例式 $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-a}{b}=\dfrac{z-c}{d}$，則$(a，b，c，d)=$

＿＿＿＿＿＿.

解答 $(4，3，2，1)$

解析 L：$\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-a}{b}=\dfrac{z-c}{d}$ 過點$(-1，a，c)$，方向向量 $\overrightarrow{d}=(2，b，d)$，

$(-1，a，c)=A(-1，4，2)\Rightarrow a=4，c=2$，

$\overrightarrow{d} \,//\, \overrightarrow{AB}=(-4，-6，-2)=(-2)(2，3，1)$

$\Rightarrow (2，b，d)=(2，3，1)\Rightarrow b=3，d=1$，則$(a，b，c，d)=(4，3，2，1)$.

10.設直線 L：$\begin{cases}2x-y+z=3\\x-2y+2z=2\end{cases}$，試求包含直線 L 及點 $P(-1，2，3)$之平面方程式為＿＿＿＿＿＿.

解答 $2x-7y+7z-5=0$

解析 設此平面方程式為 $2x-y+z-3+k(x-2y+2z-2)=0$，又過 $P(-1，2，3)$，

則$(-2-2+3-3)+k(-1-4+6-2)=0\Rightarrow k=-4$，

$\therefore$平面方程式為 $2x-y+z-3-4(x-2y+2z-2)=0$，即 $2x-7y+7z-5=0$.

11.直線 L：$\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+2}{-4}$，說明下列各直線與直線 L 的關係為：

(A)重合　(B)平行　(C)相交於一點　(D)互為歪斜線．

(1)直線 L_1：$\dfrac{x}{-2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z}{1}$：__________．　(2)直線 L_2：$\dfrac{x+3}{-1}=\dfrac{y+4}{-1}=\dfrac{z-6}{2}$：__________．

(3)直線 L_3：$\begin{cases}\dfrac{x}{2}=\dfrac{y+1}{3}\\ z=2\end{cases}$：__________．

解答　(1)(C);(2)(A);(3)(D)

解析　(1)L：$\begin{cases}x=1+2t\\ y=0+2t\\ z=-\ 2-4t\end{cases}$，$L_1$：$\begin{cases}x=0-2s\\ y=-1+s\\ z=0+s\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}1+2t=-2s\cdots\cdots①\\ 2t=-1+s\cdots\cdots②\\ -2-4t=s\cdots\cdots③\end{cases}$，$t, s\in\mathbb{R}$，

由①，② $\Rightarrow t=\dfrac{-1}{2}$，$s=0$ 代入③合，$\therefore L$ 及 L_1 交於一點$(0，1，0)$．

(2) $\overrightarrow{d_2}=(-1，-1，2)\,/\!/\,\overrightarrow{d}=(2，2，-4)$，且 L_2 上一點 $P(-3，-4，6)\in L$，$\therefore L$ 及 L_2 重合．

(3)(i) $\overrightarrow{d_3}=(2，3，0)\not\parallel\overrightarrow{d}=(2，2，-4)$，$\therefore L_3\not\parallel L$．

(ii) L：$\begin{cases}x=1+2t\\ y=2t\\ z=-\ 2-4t\end{cases}$，$L_3$：$\begin{cases}x=0+2s\\ y=-1+3s\\ z=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}1+2t=2s\cdots\cdots①\\ 2t=-1+3s\cdots\cdots②\\ -2-4t=2\cdots\cdots③\end{cases}$，

由①，② $\Rightarrow t=\dfrac{-1}{2}$，$s=0$ 代入③不合，$\therefore L$ 及 L_3 不相交，

由(i)，(ii)可知 L 及 L_3 互為歪斜．

12.若兩直線 L_1：$\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-4}{4}=z-6$ 和 L_2：$\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-4}{3}=z+k$(其中 $k\in\mathbb{R}$)都在平面 E 上，則 $k=$______．

解答　-8

解析　L_1，L_2 都在平面 E 上，但 $L_1\not\parallel L_2$，$\therefore L_1$，L_2 必相交於一點，

則 $\begin{cases}1+3t=-1+2s\cdots\cdots①\\ 4+4t=4+3s\cdots\cdots②\\ 6+t=-k+s\cdots\cdots③\end{cases}$，$t, s\in\mathbb{R}$，由①② $\Rightarrow t=-6$，$s=-8$，代入③得 $k=-8$．

13.若 $P(1，0，-1)$，$Q(2，1，-1)$，則直線 PQ 與 $x+2y-3z=0$ 之交點坐標為__________．

解答　$(-\dfrac{1}{3}，-\dfrac{4}{3}，-1)$

解析　$\overleftrightarrow{PQ}$：$\begin{cases}x=1+t\\ y=0+t\\ z=-1\end{cases}$，交點 $A(1+t，t，-1)$代入 E：$x+2y-3z=0\Rightarrow t=-\dfrac{4}{3}$，

$\therefore$交點 $A(-\dfrac{1}{3}，-\dfrac{4}{3}，-1)$．

14.若直線 L：$\dfrac{x+2}{6}=\dfrac{y-1}{b}=\dfrac{z-1}{c}$ 與平面 E：$3x-y+2z=2$ 垂直且交點 H，則：

(1)數對$(b，c) =$______ ． (2) H 的坐標是______ ．

解答 (1)$(-2，4)$;(2)$(-\frac{1}{2}，\frac{1}{2}，2)$

解析 $\because L \perp E$，$\therefore$方向向量 $\overrightarrow{d} = (6，b，c)$ // 法向量 $\overrightarrow{n} = (3，-1，2)$，

(1)則$\frac{6}{3}=\frac{b}{-1}=\frac{c}{2}$，得 $b=-2$，$c=4$，故數對$(b，c)=(-2，4)$．

(2)$\because H \in L：\begin{cases} x=-2+6t \\ y=1-2t \\ z=1+4t \end{cases}$，$t \in \mathbb{R}$，$\therefore$設 $H(-2+6t，1-2t，1+4t)$，

$\because H \in E$，H 代入 E $\Rightarrow (-6+18t)-(1-2t)+(2+8t)=2$ $\Rightarrow t=\frac{1}{4}$，則 $H(-\frac{1}{2}，\frac{1}{2}，2)$．

15.試求包含兩平行直線 $L_1：\frac{x}{3}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z}{2}$，$L_2：\frac{x-2}{3}=\frac{y}{-1}=\frac{z+3}{2}$ 之平面方程式為______ ．

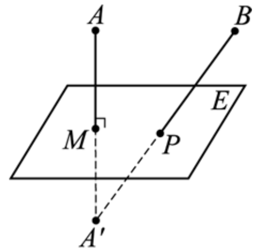
解答 $x+13y+5z+13=0$

解析 取 L_1 上一點 $P(0，-1，0)$，L_2 上一點 $Q(2，0，-3) \Rightarrow \overrightarrow{PQ}=(2，1，-3)$，

兩平行直線之方向向量 $\overrightarrow{d_1}=\overrightarrow{d_2}=(3，-1，2)$，$\overrightarrow{d_1}\times\overrightarrow{PQ}=(1，13，5)$，

$\therefore$包含 L_1，L_2 之平面方程式為 $x+13y+5z+13=0$．

16.在空間中，$A(2，1，-4)$，$B(-4，1，5)$，平面 $E：x+y+z=5$，動點 P 在平面 E 上，求 $\overline{PA}+\overline{PB}$ 的最小值為______ ．



解答 $\sqrt{141}$

解析 設 A 點對於平面 $E：x+y+z=5$ 之對稱點為 A'，則

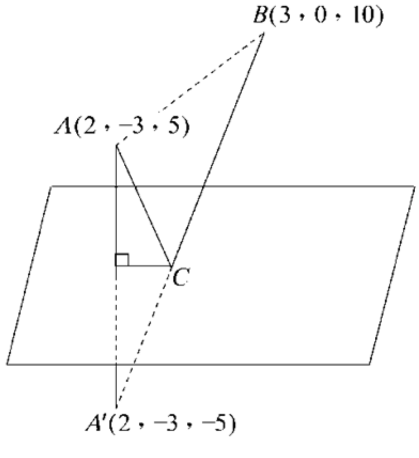
$\overleftrightarrow{AA'} \perp E \Rightarrow \overleftrightarrow{AA'}$ // $(1，1，1)$，

$\therefore$直線 AA'之方程式為$\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+4}{1}$，設 $A'(2+t，1+t，-4+t)$，

則 $\overline{AA'}$ 的中點 $M(\frac{4+t}{2}，\frac{2+t}{2}，\frac{-8+t}{2})$在平面 E 上 $\Rightarrow \frac{4+t}{2}+\frac{2+t}{2}+\frac{-8+t}{2}=5 \Rightarrow t=4$，

故 A'坐標為$(6，5，0)$，則 $\overline{PA}+\overline{PB}$ 最小值$=\overline{A'B}=\sqrt{100+16+25}=\sqrt{141}$ ．

17.$\triangle ABC$ 的三頂點坐標為 $A(2，-3，5)$，$B(3，0，10)$，$C(x，y，0)$，則當 x，y 之值為______時，$\triangle ABC$ 之周長最小．



解答 $x=\frac{7}{3}$，$y=-2$

解析 點 C 在 xy 平面上，且 A，B 在 xy 平面的同側，

點 $A(2，-3，5)$與 $A'(2，-3，-5)$對稱於 xy 平面，

$\overleftrightarrow{A'B}：\begin{cases} x=2+t \\ y=-3+3t \\ z=-5+15t \end{cases}$，$t \in \mathbb{R}$，

欲使 $\overline{AC}+\overline{BC}=\overline{A'C}+\overline{BC}$ 最小，則點 C 必須為 $\overleftrightarrow{A'B}$ 與 xy 平面的交點，

$z=0\Rightarrow t=\dfrac{1}{3}$，得 $x=\dfrac{7}{3}$，$y=-2$．

18.若 x，y，z 均為非負數且滿足 $\begin{cases}x+y+z=30\\3x+y-z=50\end{cases}$，則 $5x+4y+2z$ 的最大值為____________．

解答 130

解析 $L:\begin{cases}x+y+z=30\\3x+y-z=50\end{cases}\Rightarrow L:\begin{cases}x=10+t\\y=20-2t\\z=t\end{cases}$，$t\in\mathbb{R}$，又 $\begin{cases}x\ge 0\\y\ge 0\\z\ge 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}t\ge -10\\t\le 10\\t\ge 0\end{cases}\Rightarrow 0\le t\le 10$，

$5x+4y+2z=5(10+t)+4(20-2t)+2(t)=-t+130$，當 $t=0$ 時，有最大值為 130．

19.過點$(1,-1,5)$且平行於直線 $\begin{cases}3x-y+z+2=0\\x+2y+z-4=0\end{cases}$ 之直線方程式為____________．

解答 $\dfrac{x-1}{-3}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z-5}{7}$

解析 直線 $L:\begin{cases}3x-y+z+2=0\\x+2y+z-4=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{n_1}=(3,-1,1)\\\overrightarrow{n_2}=(1,2,1)\end{cases}$，

方向向量 $\vec{d}=\overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2}=\left(\begin{vmatrix}-1&1\\2&1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1&3\\1&1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}3&-1\\1&2\end{vmatrix}\right)=(-3,-2,7)$，所求 $\dfrac{x-1}{-3}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z-5}{7}$．

20.設 $A(1,1,1)$，$B(2,3,4)$，$C(3,2,1)$，若 P 在 $\overline{AB}$ 上，$\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{AP}$ 之最小值 m，最大值 M，則數對$(m,M)=$____________．

解答 $(-10,\dfrac{2}{7})$

解析 $\overline{AB}:\begin{cases}x=1+t\\y=1+2t\\z=1+3t\end{cases}$，$0\le t\le 1$，$P\in\overline{AB}$，設 $P(1+t,1+2t,1+3t)$，$0\le t\le 1$，

$\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{AP}=(2-t,1-2t,-3t)\cdot(t,2t,3t)=-14t^2+4t=-14(t-\dfrac{1}{7})^2+\dfrac{2}{7}$，$0\le t\le 1$，

$\begin{cases}\text{當 } t=\dfrac{1}{7}\text{ 時，有 } M=\dfrac{2}{7}\\\text{當 } t=1\text{ 時，有 } m=-10\end{cases}$，∴數對$(m,M)=(-10,\dfrac{2}{7})$．

21.空間中相交二直線 $L_1:\begin{cases}12x-5y-4z=41\\4x-y-4z=13\end{cases}$，$L_2: x=1+4t$，$y=1+2t$，$z=-3+4t$，$t\in\mathbb{R}$，則 L_1，L_2 所決定之平面方程式為____________．

解答 $7x-2y-6z-23=0$

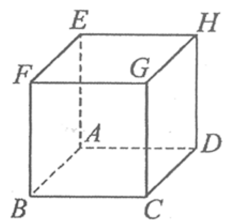
解析 $\begin{cases}L_1\text{ 之方向向量 }\overrightarrow{d_1}=(12,-5,-4)\times(4,-1,-4)=(16,32,8)\\L_2\text{ 之方向向量 }\overrightarrow{d_2}=(4,2,4)\end{cases}$

$\Rightarrow \overrightarrow{d_1}\times\overrightarrow{d_2}=\left(\begin{vmatrix}32 & 8\\ 2 & 4\end{vmatrix}，\begin{vmatrix}8 & 16\\ 4 & 4\end{vmatrix}，\begin{vmatrix}16 & 32\\ 4 & 2\end{vmatrix}\right)=(112，-32，-96)$，

取平面 E 之法向量 $\overrightarrow{n}=(7，-2，-6)$且平面 E 過點$(1，1，-3)$

$\Rightarrow E：7(x-1)-2(y-1)-6(z+3)=0$，得 $E：7x-2y-6z-23=0$．

22.如圖，正立方體 $ABCD-EFGH$ 中，若平面 $CDEF$ 所在的平面方程式為 $x-2y+2z=5$，且 $A(3,\ -1,\ 3)$，則：(1)正立方體的稜長 $\overline{AB}=$__________．　(2) H 點坐標為________________．



解答　(1) $2\sqrt{2}$;(2) $(\frac{5}{3},\ \frac{5}{3},\ \frac{1}{3})$

解析　(1)令稜長 $\overline{AB}=a\Rightarrow\overline{AH}=\sqrt{2}a$，

$d(A，平面\ CDEF)=\frac{1}{2}\overline{AH}\Rightarrow\frac{|3-2(-1)+2\cdot3-5|}{\sqrt{1+4+4}}=\frac{1}{2}\sqrt{2}a$，

$\therefore\frac{6}{3}=\frac{1}{2}\sqrt{2}a\Rightarrow a=2\sqrt{2}$．

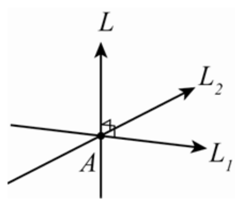
(2) H 點即為 A 對於平面 $CDEF$ ：$x-2y+2z=5$ 之對稱點，

$\Rightarrow\overrightarrow{d}=\overrightarrow{n}=(1,\ -2,\ 2)$，$\therefore\overleftrightarrow{AH}:\frac{x-3}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-3}{2}$，

設 $H(k+3,\ -2k-1,\ 2k+3)$，$t\in\mathbb{R}$，則 $\overline{AH}$ 中點 $(\frac{k+6}{2},\ -k-1,\ k+3)$ 在平面上，

代入 $\Rightarrow(\frac{k+6}{2})-2(-k-1)+2(k+3)=5\Rightarrow k=-\frac{4}{3}$，$\therefore H(\frac{5}{3},\ \frac{5}{3},\ \frac{1}{3})$．

23. $L_1:\begin{cases}2x-y+z-4=0\\ 2y+z+1=0\end{cases}$，$L_2:\begin{cases}x+y+2z-2=0\\ 3x+2y-1=0\end{cases}$，則：



(1) L_1，L_2的交點 A 之坐標為____________．

(2)過 A 與 L_1，L_2均垂直的直線 L 之比例式為____________．

解答　(1)$(1，-1，1)$;(2) $\frac{x-1}{22}=\frac{y+1}{19}=\frac{z-1}{26}$

解析　(1) $L_1:\begin{cases}2x-y+z-4=0\cdots\cdots①\\ 2y+z+1=0\cdots\cdots②\end{cases}$，　$L_2:\begin{cases}x+y+2z-2=0\cdots\cdots③\\ 3x+2y-1=0\cdots\cdots④\end{cases}$，

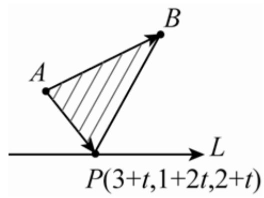
由①②③得 $x=1$，$y=-1$，$z=1$，代入④ $\Rightarrow 3-2-1=0$（合），交點 A 為$(1，-1，1)$．

(2) $\overrightarrow{d_1}=(2，-1，1)\times(0，2，1)=(-3，-2，4)$，$\overrightarrow{d_2}=(1，1，2)\times(3，2，0)=(-4，6，-1)$

$\Rightarrow\overrightarrow{d_L}=(-3，-2，4)\times(-4，6，-1)=(-22，-19，-26)=-(22，19，26)$，

過 $A(1，-1，1)$，　$\therefore L：\frac{x-1}{22}=\frac{y+1}{19}=\frac{z-1}{26}$．

24.二定點 $A(1，1，2)$，$B(-2，1，5)$及一直線 L：$x-3=\frac{y-1}{2}=z-2$，點 P 在 L 上移動，則△PAB 面積之最小值為____________．



解答 $\sqrt{6}$

解析 設 $P(3+t,\ 1+2t,\ 2+t)\in L$， $t\in\mathbb{R}$，作 $\overrightarrow{AB}=(-3,\ 0,\ 3)$， $\overrightarrow{AP}=(2+t,\ 2t,\ t)$

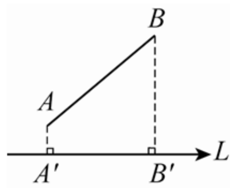
$\Rightarrow a\triangle PAB=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AP}|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{18\times(6t^2+4t+4)-(-6)^2}$

$=\frac{1}{2}\sqrt{108t^2+72t+36}=3\sqrt{3t^2+2t+1}=3\sqrt{3(t+\frac{1}{3})^2+\frac{2}{3}}$，

$\therefore$當 $t=-\frac{1}{3}$ 時，$a\triangle PAB$ 有最小值為 $3\times\sqrt{\frac{2}{3}}=\sqrt{6}$，此時 $P(3-\frac{1}{3},\ 1-\frac{2}{3},\ 2-\frac{1}{3})=(\frac{8}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{5}{3})$．

25.$A(1,\ 0,\ 1)$，$B(2,\ 2,\ 4)$，則 $\overline{AB}$ 在 L：$\frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z+5}{6}$ 上之正射影長為___________．

解答 $\frac{26}{7}$

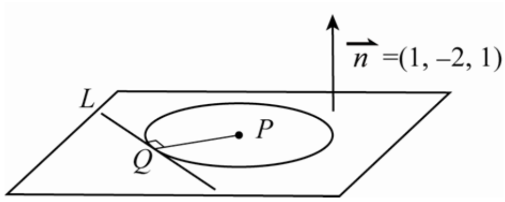


解析 $\overrightarrow{d}=(2,\ 3,\ 6)$，則 $\overline{AB}$ 在 L 上的正射影長 $=\overline{A'B'}=\overrightarrow{AB}$ 在 $\overrightarrow{d}$ 上的正射影長，

又 $\overrightarrow{AB}=(1,\ 2,\ 3)\Rightarrow$ 所求 $=\left|\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{d}}{|\overrightarrow{d}|}\right|=\left|\frac{2+6+18}{\sqrt{4+9+36}}\right|=\frac{26}{7}$．

26.在坐標空間中，平面 $x-2y+z=0$ 上有一以點 $P(1,\ 1,\ 1)$ 為圓心的圓 Γ，而 $Q(-9,\ 9,\ 27)$ 為圓 Γ 上一點．若過 Q 與圓 Γ 相切的直線之一方向向量為 $(a,\ b,\ 1)$，則(1) $a=$___________． (2) $b=$___________．

解答 (1)5;(2)3



解析 $\overrightarrow{PQ}=(-10,\ 8,\ 26)$，平面法向量 $\overrightarrow{n}=(1,\ -2,\ 1)$，

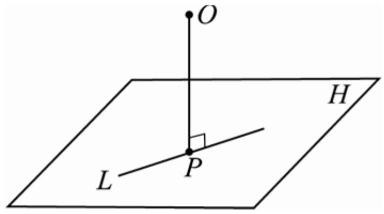
設切線 L 之方向向量 $\overrightarrow{d}=(a,\ b,\ 1)$，

$\because \overrightarrow{PQ}\perp\overrightarrow{d}$， $\therefore \overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{d}=0\Rightarrow -10a+8b+26=0$，

$\because \overrightarrow{n}\perp\overrightarrow{d}$， $\therefore \overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{d}=0\Rightarrow a-2b+1=0\Rightarrow\begin{cases}5a-4b=13\\a-2b=-1\end{cases}$，解得 $a=5$，$b=3$．

27.H：$x-y+z=2$ 為坐標空間中一平面，L 為平面 H 上的一直線．已知點 $P(2,\ 1,\ 1)$ 為 L 上距離原點 O 最近的點，則(2，______，______)為 L 的方向向量．

解答 -1，-3



解析 H：$x-y+z=2$ 的法向量為 $\overrightarrow{n}=(1,\ -1,\ 1)$，

設 L 之方向向量為 $\overrightarrow{d}=(2,\ a,\ b)\Rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{d}\perp\overrightarrow{n}\\\overrightarrow{d}\perp\overrightarrow{OP},\ \overrightarrow{OP}=(2,\ 1,\ 1)\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}2-a+b=0\\4+a+b=0\end{cases}\Rightarrow a=-1$，$b=-3$，故 L 之方向向量為(2，−1，−3)．

28.在空間坐標中，設 xy 平面為一鏡面，有一光線通過點 $P(1,2,1)$，射向鏡面上的點 $O(0,0,0)$，經鏡面反射後通過點 R，若 $\overline{OR}=2\overline{PO}$，則 R 點的坐標為__________．

解答 $(-2,-4,2)$

解析 P 對 xy 平面的對稱點 $P'(1,2,-1)$，$\overrightarrow{OR}=2\overrightarrow{P'O}=2(-1,-2,1)=(-2,-4,2)$，知 $R(-2,-4,2)$．

29.設 L 為平面 $x-2y+z=1$ 與平面 $x+y-2z=1$ 的交線，則直線 L 上與點 $(1,\ 2,\ 1)$ 距離最近之點的坐標為________．

解答 $(2,\ 1,\ 1)$

解析 L：$\begin{cases}x-2y+z=1\cdots\cdots①\\x+y-2z=1\cdots\cdots②\end{cases}$，

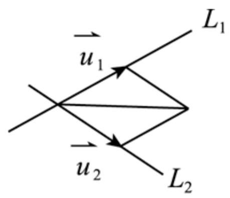
①−② 得 $y=z$，令 $y=z=t$，設交線 L 參數式為 $(1+t,\ t,\ t)$，

又 $\sqrt{(1+t-1)^2+(t-2)^2+(t-1)^2}=\sqrt{3t^2-6t+5}=\sqrt{3(t-1)^2+2}$，

當 $t=1$ 時，上式有最小值 $\sqrt{2}$，故直線 L 上與點 $(1,\ 2,\ 1)$ 距離最近之點為 $(2,\ 1,\ 1)$．

30. $L_1:\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-3}{-2}=\dfrac{z}{1}$，$L_2:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-3}{-2}$ 交於點 $P(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$，若其交角平分線為 $\begin{cases}x=\alpha+\ell t\\y=\beta+mt\\z=\gamma+nt\end{cases}$，$t\in\mathbb{R}$，則 $\ell:m:n=$__________．

解答 $1:(-4):3$ 或 $3:0:(-1)$



解析 L_1 之 $\overrightarrow{d_1}=(2,\ -2,\ 1)$，其方向之單位向量 $\overrightarrow{u_1}=(\frac{2}{3},\ -\frac{2}{3},\ \frac{1}{3})$，

L_2 之 $\overrightarrow{d_2}=(1,\ 2,\ -2)$，其方向之單位向量 $\overrightarrow{u_2}=(\frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ -\frac{2}{3})$，

$\overrightarrow{u_1}+\overrightarrow{u_2}=(1,\ 0,\ -\frac{1}{3})$，$\therefore \ell:m:n=3:0:(-1)$，

另一角的分角線：

$\overrightarrow{u_1}-\overrightarrow{u_2}=(\frac{1}{3},\ -\frac{4}{3},\ 1)$，$\therefore \ell:m:n=1:(-4):3$．