高雄市明誠中學 高二數學平時測驗 日期：101.04.17					
範圍	2-2+3 直線方程式及三元一次方程組	班級 座號	二年____班	姓名	

一、填充題 (每題 10 分)

1.求直線 L：$\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-3}{1}$ 與平面 $2x-y+3z=3$ 之交點坐標爲____________．

解答 $(-2,-1,2)$

解析 設 $P(3t+1,3t+2,t+3)$爲 L 與平面之交點，代入平面：$2(3t+1)-(3t+2)+3(t+3)=3$

$\Rightarrow t=-1$，$\therefore$交點爲$(-2,-1,2)$．

2.一平面過點$(2,-1,1)$且與直線$\begin{cases}3x+y+z-1=0\\x-2y+z+1=0\end{cases}$垂直，則此平面的方程式爲____________．

解答 $3x-2y-7z=1$

解析 $\overrightarrow{N}=(3,1,1)\times(1,-2,1)=(3,-2,-7)\ \Rightarrow 3(x-2)-2(y+1)-7(z-1)=0$

$\therefore$平面方程式爲：$3x-2y-7z=1$．

3.求兩直線 L_1：$\dfrac{x+2}{8}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z-1}{4}$ 與 L_2：$\dfrac{x-4}{2}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z-4}{1}$ 的交點坐標爲____________．

解答 $(2,-1,3)$

解析 設 $P(8t-2,-2t,4t+1)$爲 L_1 與 L_2 交點，代入 L_2：$\dfrac{8t-6}{2}=\dfrac{-2t+2}{-1}=\dfrac{4t-3}{1}\Rightarrow t=\dfrac{1}{2}$，

$\therefore$交點爲$(2,-1,3)$．

4.若兩直線 L_1：$\dfrac{x-8}{-1}=\dfrac{y+6}{2}=\dfrac{z-3}{-2}$ 與 L_2：$\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y+2}{-2}=\dfrac{z-5}{2}$，求

(1)L_1 與 L_2 的距離爲____________．(2)包含 L_1 與 L_2 的平面方程式爲____________．

解答 (1)6;　(2)$2x+2y+z-7=0$

解析 $\because(-1,2,-2)\,//\,(1,-2,2)$，$\therefore L_1\,//\,L_2$．

(1)取 $P(8,-6,3)\in L_1$，設 P 在 L_2 上之投影點爲 $Q(3+t,-2-2t,5+2t)$，

$\overrightarrow{PQ}=(t-5,4-2t,2+2t)$，且 $\overline{PQ}\perp L_2$，

$\therefore(t-5,4-2t,2+2t)\cdot(1,-2,2)=0\Rightarrow t=1\Rightarrow Q(4,-4,7)$，

$\therefore d(L_1,L_2)=\overline{PQ}=\sqrt{(-4)^2+2^2+4^2}=6$．

(2)L_1：$\dfrac{x-8}{-1}=\dfrac{y+6}{2}=\dfrac{z-3}{-2}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{x-8}{-1}=\dfrac{y+6}{2}\\\dfrac{x-8}{-1}=\dfrac{z-3}{-2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x+y-10=0\\2x-z-13=0\end{cases}$，

平面族，設所求平面爲$(2x+y-10)+k(2x-z-13)=0$，

L_2 上一點$(3,-2,5)$代入：$-6-12k=0\Rightarrow k=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow$ 所求平面爲：$2x+2y+z-7=0$．

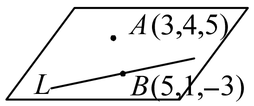
5.求過點 $A\,(3\,,4\,,5)$，且包含直線 L：$\dfrac{x-5}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+3}{3}$ 之平面方程式爲____________.

解答　$x-2y+z=0$

解析　在 L 上取一點 $B\,(5\,,1\,,-3)$，$\overrightarrow{AB}=(2,-3,-8)$，$\overrightarrow{N_L}=(1,2,3)$，

$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{N_L}=(7,-14,7)=7(1,-2,1)$，取 $\overrightarrow{N}=(1,-2,1)$，

設所求平面爲 $x-2y+z+d=0$，$A\,(3\,,4\,,5)$代入得 $d=0$，$\therefore$所求爲 $x-2y+z=0$．



6.空間中點 $A\,(3\,,4\,,5)$，直線 L：$\dfrac{x-5}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+3}{3}$，則

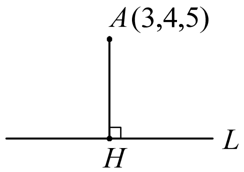
(1)A 點在直線 L 的垂足點坐標爲____________．(2)求 A 點到直線 L 的距離爲____________.

解答　(1)$(7\,,5\,,3)$;(2)$\sqrt{21}$

解析　(1)設垂足點 $H\,(5+t\,,1+2t\,,-3+3t)$，$\overrightarrow{AH}=(2+t,-3+2t,-8+3t)$，$\overrightarrow{N_L}=(1,2,3)$，

$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{N_L}=0 \quad\Rightarrow\quad 2+t-6+4t-24+9t=0 \quad\Rightarrow\quad t=2$，$\therefore H\,(7\,,5\,,3)$．

(2) $\overrightarrow{AH}=(4,1,-2)$，$\therefore|\overrightarrow{AH}|=\sqrt{21}$．



7.已知二平行線 L_1：$\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+5}{2}$，$L_2$：$\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-4}{1}=\dfrac{z-1}{2}$，求包含 L_1 及 L_2 的平面方程式爲______.

解答　$2y-z-7=0$

解析　L_1 上取一點 $A\,(0\,,1\,,-5)$，L_2 上取一點 $B\,(2\,,4\,,1)$，

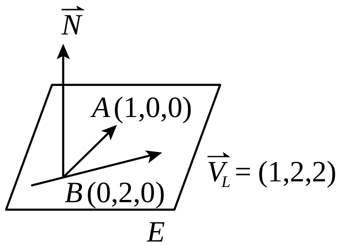
$\overrightarrow{AB}=(2,3,6)$，$\overrightarrow{N_{L_2}}=(2,1,2)$，$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{N_{L_2}}=(0,8,-4)=4(0,2,-1)$，

所求平面爲 $0(x-0)+2(y-1)-(z+5)=0 \quad\Rightarrow\quad 2y-z-7=0$．

8.已知 $A(1,0,0)$，及一直線 $L:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z}{2}$，

(1)求過 A 點且包含直線 L 的平面方程式爲____________;

(2)求過 A 點且垂直直線 L 的直線方程式爲____________.



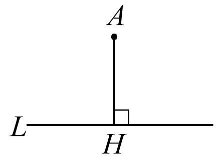
解答　(1)$2x+y-2z=2$;(2)$\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z}{1}$

解析　(1) $\overrightarrow{N}=\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{V_L}=(1,-2,0)\times(1,2,2)=(-4,-2,4)=-2(2,1,-2)$　$\therefore E:2x+y-2z=2$．

(2)設垂足 $H(t,2+2t,2t)$，$\overrightarrow{AH}=(t-1,2t+2,2t)$，$\overrightarrow{V_L}=(1,2,2)$

$\because \overrightarrow{AH}\perp\overrightarrow{V_L}$，$\therefore \overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{V_L}=0 \quad \Rightarrow 1\cdot(t-1)+2\cdot(2t+2)+2\cdot 2t=0 \Rightarrow t=-\dfrac{1}{3}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AH}=(-\dfrac{4}{3},\dfrac{4}{3},-\dfrac{2}{3})=-\dfrac{2}{3}(2,-2,1)$，　$\therefore$所求 $\overleftrightarrow{AH}:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z}{1}$ ．



9.設兩直線 $L_1:\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y+7}{-4}=\dfrac{z-1}{2}$，$L_2:\dfrac{x-11}{4}=\dfrac{y}{-3}=\dfrac{z-2}{3}$，則 L_1 與 L_2 所決定的平面方程式爲________．

解答　$6x-5y-13z=40$

解析　$\overrightarrow{N}=\overrightarrow{V_1}\times\overrightarrow{V_2}=(1,-4,2)\times(4,-3,3)=(-6,5,13)=-(6,-5,-13)$，

又 L_1 上之點$(3,-7,1)$，$\therefore E$：$6(x-3)-5(y+7)-13(z-1)=0 \Rightarrow 6x-5y-13z=40$ ．

10. $L_1:\dfrac{x-5}{3}=\dfrac{y+7}{-6}=\dfrac{z-1}{-2}$ 與 $L_2:\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+5}{2}$ 爲歪斜線，P 在 L_1 上，Q 在 L_2 上，當 $\overline{PQ}$ 有最小值時，

(1)P 點坐標爲____________；(2)Q 點坐標爲____________．

解答　(1)$(2,-1,3)$;(2)$(4,2,-3)$

解析　設 $P(3t+5,-6t-7,-2t+1)$，$Q(3s+1,2s,2r-5)$，t，s 爲實數

$\Rightarrow \overrightarrow{PQ}=(3s-3t-4,2s+6t+7,2s+2t-6)$，又 $\overrightarrow{V_1}=(3,-6,-2)$，$\overrightarrow{V_2}=(3,2,2)$，

$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{V_1}=0 \Rightarrow 9s-9t-12-12s-36t-42-4s-4t+12=0$

$\Rightarrow -7s-49t-42=0 \Rightarrow s+7t+6=0$……①，

$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{V_2}=0 \Rightarrow 9s-9t-12+4s+12t+14+4s+4t-12=0$

$\Rightarrow 17s+7t-10=0$……②，

解①②得 $s=1$，$t=-1$，$\therefore P(2,-1,3)$，$Q(4,2,-3)$ ．

11.二歪斜線：$L_1:x-1=y=4-z$，$L_2:\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z-2}{-5}$，求

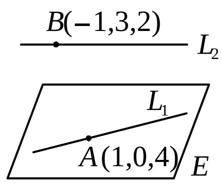
(1)包含 L_1 且與 L_2 平行之平面 E 之方程式____________；(2)L_1 與 L_2 之公垂線段長爲____________．

解答　(1)$3x-2y+z=7$;(2)$\sqrt{14}$

解析　(1) $\overrightarrow{N}=\overrightarrow{V_1}\times\overrightarrow{V_2}=(1,1,-1)\times(3,2,-5)=(-3,2,-1)=-(3,-2,1)$，

$\therefore E:3(x-1)-2(y-0)+(z-4)=0$，即 $3x-2y+z=7$ ．

(2)$d(L_1,L_2)=d(B,E)=\dfrac{|-3-6+2-7|}{\sqrt{14}}=\dfrac{14}{\sqrt{14}}=\sqrt{14}$ ．



12.兩歪斜線 $L_1:\dfrac{x-5}{3}=\dfrac{y+7}{-6}=\dfrac{z-1}{-2}$， $L_2:\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+5}{2}$ 試求：

(1)公垂線段長爲____________；(2)公垂線方程式爲____________．

解答 (1)7;(2) $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z-3}{-6}$

解析 設 $P(3t+5,-6t-7,-2t+1)$，$Q(3s+1,2s,2s-5)$，t，r 爲實數

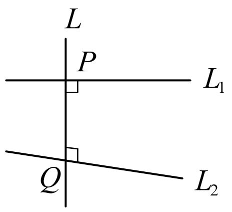
$$\Rightarrow \overrightarrow{PQ}=(3s-3t-4,2s+6t+7,2s+2t-6),$$

$$\overrightarrow{V}=\overrightarrow{V_1}\times\overrightarrow{V_2}=(3,-6,-2)\times(3,2,2)=(-8,-12,24)=-4(2,3,-6),$$

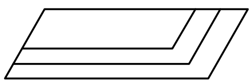
$$\because \overrightarrow{V}\,//\,\overrightarrow{PQ},\ \therefore \frac{3s-3t-4}{2}=\frac{2s+6t+7}{3}=\frac{2s+2t-6}{-6}$$

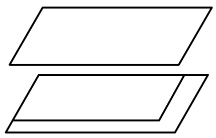
$$\Rightarrow\begin{cases}9s-9t-12=4s+12t+14\\-4s-12t-14=2s+2t-6\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}5s-21t=26\\6s+14t=-8\end{cases}\Rightarrow s=1,\ t=-1,\quad \therefore P(2,-1,3),\ Q(4,2,-3)$$

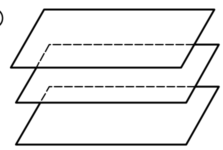
(1) $\overline{PQ}=\sqrt{4+9+36}=7$ ．(2) $L:\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z-3}{-6}$ ．

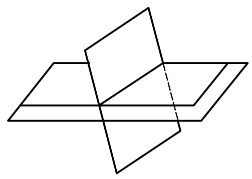


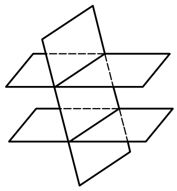
13.下列各圖代表空間中三平面相交的 8 種情形：

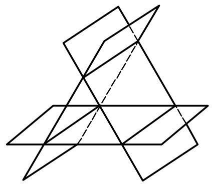
①

三平面重合

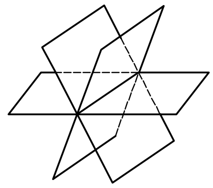
②

二平面重合且與第三平面平行

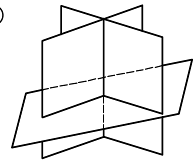
③

三平面平行

④

二平面重合且與第三平面交於一直線

⑤

二平面平行且與第三平面交於一直線

⑥

三平面兩兩相交於一直線但沒有共同交點

⑦

三平面兩兩不重合且相交於一直線

⑧

三平面交於一點

試問下列各組平面相交的圖形爲上述何者？（寫下代號即可）

(1) $\begin{cases}E_1：2x-y+3z=1\\E_2：2x-y+3z=5\\E_3：2x-y+3z=4\end{cases}$____________．　(2) $\begin{cases}E_1：2x-y+3z=4\\E_2：4x-2y+6z=8\\E_3：x-2y+z=1\end{cases}$____________．

(3) $\begin{cases} E_1: x+y+z=1 \\ E_2: 3x+3y+3z=3 \\ E_3: 2x+2y+2z=5 \end{cases}$ ________ .

(4) $\begin{cases} E_1: x-2y+z=4 \\ E_2: -x+2y-z=-4 \\ E_3: 2x-4y+2z=8 \end{cases}$ ________ .

(5) $\begin{cases} E_1: x-2y+z=0 \\ E_2: x-2y+z=1 \\ E_3: 3x-y-z=2 \end{cases}$ ________ .

(6) $\begin{cases} E_1: x-y+z=2 \\ E_2: 2x+y-z=1 \\ E_3: 2x+y+z=7 \end{cases}$ ________ .

(7) $\begin{cases} E_1: x+y-z=1 \\ E_2: x+2y+3z=2 \\ E_3: x+3y+7z=3 \end{cases}$ ________ .

(8) $\begin{cases} E_1: x+y+2z=2 \\ E_2: 2x+y+z=2 \\ E_3: x+2y+5z=2 \end{cases}$ ________ .

解答 (1) ③　(2) ④　(3) ②　(4) ①　(5) ⑤　(6) ⑧　(7) ⑦　(8) ⑥

解析 (1)因爲三平面的法向量均爲$(2,-1,3)$，且三平面均不重合，③．

(2)因爲 E_1： $2x-y+3z=4$ 與 E_2： $4x-2y+6z=8$ 爲二重合平面，且共同的法向量$(2,-1,3)$與 E_3 的法向量$(1,-2,1)$不平行，④．

(3)因爲 E_1： $x+y+z=1$ 與 E_2： $3x+3y+3z=3$ 爲二重合平面，且共同的法向量$(1,1,1)$與 E_3 的法向量$(2,2,2)$平行，②．

(4)因爲 E_1： $x-2y+z=4$，E_2： $-x+2y-z=-4$ 與 E_3： $2x-4y+2z=8$ 爲重合三平面，①．

(5)因爲 E_1： $x-2y+z=0$ 與 E_2： $x-2y+z=1$ 爲二平行平面，且共同的法向量$(1,-2,1)$與 E_3 的法向量$(3,-1,-1)$不平行，⑤．

(6)聯立方程式恰一組解，即三平面共點．故填⑧．

(7)聯立方程式 $\begin{cases} x+y-z=1\cdots① \\ x+2y+3z=2\cdots② \\ x+3y+7z=3\cdots③ \end{cases}$，利用加減消去法，

由② − ①及③ − ①消去 x，得 $\begin{cases} x+y-z=1\cdots① \\ y+4z=1\cdots④ \\ 2y+8z=2\cdots⑤ \end{cases}$ ．

由⑤ − ④ × 2 消去 y，得 $\begin{cases} x+y-z=1\cdots① \\ y+4z=1\cdots④ \\ 0=0\cdots⑥ \end{cases}$ 即 $\begin{cases} x+y-z=1\cdots① \\ y+4z=1\cdots④ \end{cases}$ 可得聯立方程式的解爲

$\begin{cases} x=5t \\ y=1-4t \\ z=t \end{cases}$（$t$ 爲實數），即聯立方程式有無限多組解．三平面的法向量均不平行，故填⑦．

(8)聯立方程式 $\begin{cases} x+y+2z=2\cdots① \\ 2x+y+z=2\cdots② \\ x+2y+5z=2\cdots③ \end{cases}$，利用加減消去法，

由② − ① × 2 及③ − ①消去 x，得 $\begin{cases} x+y+2z=2\cdots① \\ -y-3z=-2\cdots④ \\ y+3z=0\cdots⑤ \end{cases}$，

由⑤ + ④消去 y，得 $\begin{cases} x+y+2z=2\cdots① \\ -y-3z=-2\cdots④ \\ 0=-2\cdots⑥ \end{cases}$，

沒有 x，y，z 滿足⑥，所以聯立方程式無解．三平面的法向量均不互相平行，⑥．

14.已知 $A(5,1)$，$B(1,3)$，$C(1,1)$，若通過 A，B，C 三點之圓方程式爲 $x^2+y^2+dx+ey+f=0$，求序組(d,e,f)之值爲____________．

解答　$(-6,-4,8)$

解析　圓方程式爲 $x^2+y^2+dx+ey+f=0$，

$A(5,1)$代入得 $25+1+5d+e+f=0$，

$B(1,3)$代入得 $1+9+d+3e+f=0$，

$C(1,1)$代入得 $1+1+d+e+f=0$，

$\Rightarrow \begin{cases} 5d+e+f=-26\cdots\cdots① \\ d+3e+f=-10\cdots\cdots② \\ d+e+f=-2\cdots\cdots③ \end{cases}$，解①②③得 $d=-6$，$e=-4$，$f=8$，$\therefore (d,e,f)=(-6,-4,8)$．

15.有個三位數，其百位數字與個位數字之和等於十位數字，如果將百位數字與十位數字交換，所得之三位數較原數大 450，如果將原數的十位數字與個位數字交換，所得之三位數較原數小 27，試求此數爲____________．

解答　385

解析　設此數爲 $100a+10b+c$，則 $\begin{cases} a+c=b \\ 100b+10a+c=100a+10b+c+450 \\ 100a+10c+b=100a+10b+c-27 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a-b+c=0 \\ a-b=-5 \\ b-c=3 \end{cases}$，

解得 $a=3$，$b=8$，$c=5$，故此數爲 385．

16.解 $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=0 \\ \dfrac{4}{x}+\dfrac{3}{y}+\dfrac{2}{z}=5 \\ \dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{y}+\dfrac{4}{z}=-4 \end{cases}$ 得(1)$x=$____________，(2)$y=$____________，(3)$z=$____________．

解答　(1)$\dfrac{1}{2}$;(2)1;(3)$-\dfrac{1}{3}$

解析　$\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=0\cdots\cdots① \\ \dfrac{4}{x}+\dfrac{3}{y}+\dfrac{2}{z}=5\cdots\cdots② \\ \dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{y}+\dfrac{4}{z}=-4\cdots\cdots③ \end{cases}$

① × 2 − ② $\Rightarrow -\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{y}=-5\cdots\cdots$④

① × 4 − ③ $\Rightarrow \dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{y}=4\cdots\cdots$⑤

④ × 2 + ⑤ $\Rightarrow \dfrac{-3}{x}=-6 \Rightarrow x=\dfrac{1}{2}$ 代入④得 $y=1$，代入①得 $z=-\dfrac{1}{3}$，　$\therefore x=\dfrac{1}{2}$，$y=1$，$z=-\dfrac{1}{3}$．

17.解下列方程組：

(1) $\begin{cases} 3x-y+2z=0 \\ x-2y+z=-1 \\ 2x-9y+7z=5 \end{cases}$ ，$(x,y,z)=$ __________ ．(2) $\begin{cases} x-3y-z=2 \\ 2x-y+2z=3 \\ x-8y-5z=3 \end{cases}$，$(x,y,z)=$ __________ ．

(3) $\begin{cases} x+y+z=7 \\ 2x+3y+z=9 \\ 3x+4y+5z=1 \end{cases}$ ，$(x,y,z)=$ __________ ．

解答 (1)$(-\frac{13}{10},\frac{11}{10},\frac{5}{2})$;　(2)$(\frac{7}{5}-\frac{7}{5}t,-\frac{1}{5}-\frac{4}{5}t\ ,t)$，$t$ 爲實數;　(3)$(22,-10,-5)$

解析 (1) $\begin{cases} 3x-y+2z=0\cdots\cdots① \\ x-2y+z=-1\cdots\cdots② \\ 2x-9y+7z=5\cdots\cdots③ \end{cases}$

$①-②\times 3 \Rightarrow 5y-z=3\cdots\cdots④$

$②\times 2-③ \Rightarrow 5y-5z=-7\cdots\cdots⑤$

由④⑤可得 $y=\frac{11}{10}$， $z=\frac{5}{2}$，代入②得 $x=-\frac{13}{10}$， $\therefore (x,y,z)=(-\frac{13}{10},\frac{11}{10},\frac{5}{2})$ ．

(2) $\begin{cases} x-3y-z=2\cdots\cdots① \\ 2x-y+2z=3\cdots\cdots② \\ x-8y-5z=3\cdots\cdots③ \end{cases}$

$①-③ \Rightarrow 5y+4z=-1$，

$②-①\times 2 \Rightarrow 5y+4z=-1$，

設 $z=t \Rightarrow y=-\frac{1}{5}-\frac{4}{5}t$，代入①得 $x=2+3y+z=\frac{7}{5}-\frac{7}{5}t$，

$\therefore (x,y,z)=(\frac{7}{5}-\frac{7}{5}t,-\frac{1}{5}-\frac{4}{5}t\ ,t)$，$t$ 爲實數．

(3) $\begin{cases} x+y+z=7\cdots\cdots① \\ 2x+3y+z=9\cdots\cdots② \\ 3x+4y+5z=1\cdots\cdots③ \end{cases}$

$②-① \Rightarrow x+2y=2\cdots\cdots④$

$①\times 5-③ \Rightarrow 2x+y=34\cdots\cdots⑤$

由④⑤可得 $x=22$，$y=-10$，代入①得 $z=-5$，$\therefore (x,y,z)=(22,-10,-5)$ ．

18.空間兩直線 $\begin{cases} x+y-z=0 \\ 4x-3y+z=1 \end{cases}$ 與 $\begin{cases} 2x+y-z=k \\ 3x+2y-2z=1 \end{cases}$ 相交於一點，則 $k=$ __________ ．

解答 1

解析 $\begin{cases} x+y-z=0\cdots\cdots① \\ 4x-3y+z=1\cdots\cdots② \\ 3x+2y-2z=1\cdots\cdots③ \\ 2x+y-z=k\cdots\cdots④ \end{cases}$

解①②③得 $x=1$，$y=2$，$z=3$，代入④得 $k=1$ ．

19.解$\begin{cases}6(x+y)=5xy\\2(y+z)=3yz\\3(z+x)=4zx\end{cases}$ 得$(x,y,z)=$____________．

$\boxed{\text{解答}}$ (0,0,0)或(3,2,1)

$\boxed{\text{解析}}$ (1)$xyz=0$：　當 $x=0$ 代入 $6(x+y)=5xy\Rightarrow y=0$，同理 $z=0$，$\therefore(x,y,z)=(0,0,0)$．

(2)$xyz\neq 0$：

$$\begin{cases}6(x+y)=5xy\\2(y+z)=3yz\\3(z+x)=4zx\end{cases}\text{同除以 }xyz\Rightarrow\begin{cases}\frac{1}{y}+\frac{1}{x}=\frac{5}{6}\\\frac{1}{z}+\frac{1}{y}=\frac{3}{2}\\\frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{4}{3}\end{cases}\quad\therefore(x,y,z)=(3,2,1)\text{．}$$

由(1)(2)可得，$(x,y,z)=(0,0,0)$或$(3,2,1)$．

8.三平面爲$\begin{cases}ax+y+2z=1\\x+ay+2z=1\\x+2y+az=1\end{cases}$，若此三平面相異，而兩兩交線互相平行，則 $a=$____________．

$\boxed{\text{解答}}$ -3

$\boxed{\text{解析}}$ SOL 一：$\begin{cases}ax+y+2z=1\cdots\cdots①\\x+ay+2z=1\cdots\cdots②\\x+2y+az=1\cdots\cdots③\end{cases}$

①−②　　$(a-1)x+(1-a)y=0$

①$\times a-$②$\times 2$　$(a^2-2)x+(a-4)y=a-2$

兩兩交線互相平行即無解 $\Rightarrow\dfrac{a-1}{a^2-2}=\dfrac{1-a}{a-4}\neq\dfrac{0}{a-2}$

$(a^2-2)(1-a)=(a-1)(a-4)\Rightarrow(a-1)(a-2)(a+3)=0\Rightarrow a=-3$，1，2，

但 $a=1$ 或 $a=2$ 表其中兩平面重合，故不合，$\therefore a=-3$．

SOL 二：兩兩交線互相平行即無解 $\Rightarrow\Delta=0$，

$$\Delta=\begin{vmatrix}a&1&2\\1&a&2\\1&2&a\end{vmatrix}=(a+3)\begin{vmatrix}1&1&2\\1&a&2\\1&2&a\end{vmatrix}=(a+3)(a^2-3a+2)=0\Rightarrow a=-3\text{，1，2，}$$

但 $a=1$ 或 $a=2$ 表其中兩平面重合，故不合，$\therefore a=-3$．

20.空間中三平面 $E_1:2x+3y+z=2$、$E_2:3x-2y+z=1$、$E_3:ax+by+z=1$，若三平面相交情形爲其中兩平面平行與另一平面各交一線，則 $a+b=$____________．

$\boxed{\text{解答}}$ 5

$\boxed{\text{解析}}$ ①若 $E_1//E_3$　$\dfrac{2}{a}=\dfrac{3}{b}=\dfrac{1}{1}\neq\dfrac{2}{1}\Rightarrow a=2$，$b=3\Rightarrow a+b=5$．

②若 $E_2//E_3$　$\dfrac{3}{a}=\dfrac{-2}{b}=\dfrac{1}{1}=\dfrac{1}{1}$（不合，$\because E_2$與 E_3重合）．

由①② $\Rightarrow a+b=5$．

◎21.若三平面 $x+py-z=-2$、$px-5y+z=0$、$x+7y-3z=q$ 交於一直線 L，實數對$(p,q)=$__________.

解答 $(1,-4)$

解析 $\because \Delta=0$，$\therefore \begin{vmatrix} 1 & p & -1 \\ p & -5 & 1 \\ 1 & 7 & -3 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow 15-7p+p-5-7+3p^2=0 \Rightarrow p=1$，1，

$\because \Delta_x=0$，$\therefore \begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & 1 \\ q & 7 & -3 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow -30+q-5q+14=0 \Rightarrow q=-4$，$\therefore (p,q)=(1,-4)$．

◎22.空間中三平面 $E_1: x+y-z=1$、$E_2: 2x+3y+az=3$、$E_3: x+ay+3z=2$，求

(1)若三平面恰交於一點 A，則點 A 坐標為____________，（以 a 作答）

(2)若三平面兩兩交一直線且三交線互相平行，則 $a=$____________．

解答 (1)$(1,\frac{1}{a+3},\frac{1}{a+3})$;(2)$-3$

解析 (1)$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & a \\ 1 & a & 3 \end{vmatrix}=-a^2-a+6=-(a+3)(a-2)$，

$\Delta_x=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & a \\ 2 & a & 3 \end{vmatrix}=-a^2-a+6=-(a+3)(a-2)$，

$\Delta_y=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & a \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}=-(a-2)$，

$\Delta_z=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & a & 2 \end{vmatrix}=-(a-2)$，

$\therefore (x,y,z)=(\frac{\Delta_x}{\Delta},\frac{\Delta_y}{\Delta},\frac{\Delta_z}{\Delta})=(1,\frac{1}{a+3},\frac{1}{a+3})$．

(2)$a=2$ 時，有無限多解，

$a=-3$ 時，$\Delta=0$，且 Δy，$\Delta z\neq 0$

$\begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x+3y-3z=3 \\ x-3y+3z=2 \end{cases}$，$\therefore a=-3$ 時，三平面兩兩交一直線，且三交線互相平行．

23.已知二次函數 $f(x)$過點 $A(2,-11)$，$B(-8,-371)$，$C(6,-147)$，則 $f(x)=$____________．

解答 $-5x^2+6x-3$

解析 設 $f(x)=ax^2+bx+c$

過$(2,-11) \Rightarrow 4a+2b+c=-11$……①

過$(-8,-371) \Rightarrow 64a-8b+c=-371$……②

過$(6,-147) \Rightarrow 36a+6b+c=-147$……③

② − ①得 $60a-10b=-360 \Rightarrow 6a-b=-36$……④

② − ③得 $28a-14b=-224 \Rightarrow 2a-b=-16$……⑤

④ − ⑤得 $4a=-20 \Rightarrow a=-5$ 代入⑤

$-10-b=-16 \Rightarrow b=6$ 代入①

$-20+12+c=-11 \Rightarrow c=-3$

故 $f(x)=-5x^2+6x-3$.

24.設 $2x-3y+4z=x-y+2z=3x+y-2z$，求 $\dfrac{x+y-z}{2x-y+z}=$__________ .

解答　1

解析　$\begin{cases} x-2y+2z=0 \\ x+4y-6z=0 \end{cases} \Rightarrow x:y:z=2:4:3$，

設 $x=2k$，$y=4k$，$z=3k$，$\therefore \dfrac{x+y-z}{2x-y+z}=\dfrac{2k+4k-3k}{4k-4k+3k}=1$.

25.設 $xyz \neq 0$ 且 $6x-y+3z=-2x+5y+9z=8x-5y+z$，則 $\dfrac{x^2-y^2+z^2}{x^2+y^2+z^2}=$__________ .

解答　$\dfrac{33}{35}$

解析　$\begin{cases} 6x-y+3z=-2x+5y+9z \\ 6x-y+3z=8x-5y+z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8x-6y-6z=0\cdots\cdots① \\ 2x-4y-2z=0\cdots\cdots② \end{cases}$

② × 3 − ① $\Rightarrow -2x-6y=0 \Rightarrow x=-3y$ 代入②得 $z=-5y$，

$\therefore x:y:z=(-3):1:(-5)$，設 $x=-3k$，$y=k$，$z=-5k$，

$\dfrac{x^2-y^2+z^2}{x^2+y^2+z^2}=\dfrac{9-1+25}{9+1+25}=\dfrac{33}{35}$.

26.若三元一次聯立方程式 $\begin{cases} x+3y-z=-2 \\ x-5y-3z=k \\ 2x-3y+2z=9 \\ 3x+4y+z=3 \end{cases}$ 有解，則 $k=$__________ .

解答　4

解析　解 $\begin{cases} x+3y-z=-2\cdots\cdots① \\ 2x-3y+2z=9\cdots\cdots② \\ 3x+4y+z=3\cdots\cdots③ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ①\times2+②:4x+3y=5 \\ ①+③:4x+7y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases} \Rightarrow z=1$，

$(x,y,z)=(2,-1,1)$代入 $x-5y-3z=k$，$\therefore k=2-5(-1)-3=4$.