高雄市明誠中學 高二數學平時測驗					日期：101.03.20
範圍	1-4&2-1 向量外積與平面方程式	班級	二年____班	姓名	
		座號			

(10)

1.已知向量 $\overrightarrow{a}=(-3,-1,-1)$，$\overrightarrow{b}=(1,-3,2)$，

求(1) $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}=$____________． (2)由 $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ 所張出平行四邊形之面積為____________．

解答 (1)$(-5,5,10)$;(2)$5\sqrt{6}$

解析 (1) $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}=\left(\begin{vmatrix}-1 & -1\\ -3 & 2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-1 & -3\\ 2 & 1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-3 & -1\\ 1 & -3\end{vmatrix}\right)=(-5,5,10)$ ．

(2)面積$=|\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}|=\sqrt{25+25+100}=\sqrt{150}=5\sqrt{6}$ ．

2.設 x，y，$z\in\mathbb{R}$，滿足 $x+2y+3z=5$，求 $\sqrt{(x-1)^2+(y-3)^2+(z-4)^2}$ 的最小值為____________．

解答 $\sqrt{14}$

解析 令 $P(1,3,4)$，E： $x+2y+3z=5$

$\Rightarrow\sqrt{(x-1)^2+(y-3)^2+(z-4)^2}\geq d(P,E)=\dfrac{|1+6+12-5|}{\sqrt{14}}=\sqrt{14}$ ．

3.已知 $\overrightarrow{a}=(1,0,1)$，$\overrightarrow{b}=(1,-1,0)$，若 $\overrightarrow{n}\perp\overrightarrow{a}$ 且 $\overrightarrow{n}\perp\overrightarrow{b}$，$|\overrightarrow{n}|=\sqrt{3}$，求 $\overrightarrow{n}=$____________．

解答 $(1,1,-1)$或$(-1,-1,1)$

解析 $\overrightarrow{n}$ 為 $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ 之公垂向量，$\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}=(1,1,-1)$，令 $\overrightarrow{n}=t(1,1,-1)=(t,t,-t)$，

$|\overrightarrow{n}|=\sqrt{t^2+t^2+t^2}=\sqrt{3}\Rightarrow t=\pm1$，$\therefore\overrightarrow{n}=(1,1,-1)$或$(-1,-1,1)$．

4.已知 $A(-1,-2,3)$，$B(2,-1,4)$，$C(3,6,9)$為空間中三點，求$\triangle ABC$ 的面積為____________．

解答 $5\sqrt{6}$

解析 $\overrightarrow{AB}=(3,1,1)$，$\overrightarrow{AC}=(4,8,6)$，$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(-2,-14,20)$，

由 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ 所張之平行四邊形面積為$|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\sqrt{4+196+400}=\sqrt{600}=10\sqrt{6}$，

$\therefore\triangle ABC$ 面積為$5\sqrt{6}$ ．

5.設 $A(1,2,3)$與 $B(5,4,3)$為空間中兩點，則$\overline{AB}$的垂直平分面方程式為____________．

解答 $2x+y-9=0$

解析 $\overline{AB}$中點 $M(3,3,3)$，$\overrightarrow{AB}=(4,2,0)=2(2,1,0)$，

所求為 $2(x-3)+1(y-3)+0(z-3)=0 \quad\Rightarrow\quad 2x+y-9=0$．

6.空間中三點 $A(1,2,3)$，$B(-1,0,1)$，$C(0,-1,k)$，若△ABC 面積為 $2\sqrt{2}$，求 $k=$____________ .

解答 0 或 2

解析 $\overrightarrow{AB}=(-2,-2,-2)$，$\overrightarrow{AC}=(-1,-3,k-3)$，$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(-2k,2k-4,4)$，

$|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\sqrt{(-2k)^2+(2k-4)^2+4^2}=2\sqrt{2k^2-4k+8}$，

△ABC 面積 $=\sqrt{2k^2-4k+8}=2\sqrt{2}\Rightarrow 2k^2-4k=0\Rightarrow k=0$ 或 $k=2$.

7.與平面 $x+y-3z+1=0$ 平行，且與三軸截距和為 20 之平面方程式為____________ .

解答 $x+y-3z-12=0$

解析 設所求為 $x+y-3z+d=0$，

令 $y=z=0 \Rightarrow x=-d$，$z=x=0 \Rightarrow y=-d$，$x=y=0 \Rightarrow z=\frac{d}{3}$，

$(-d)+(-d)+\frac{d}{3}=20 \Rightarrow d=-12$，所求為 $x+y-3z-12=0$.

8.求通過點 $A(1,1,-1)$，且與兩平面 $x+y=0$，$x-y+z-3=0$ 均垂直的平面方程式____________ .

解答 $x-y-2z-2=0$

解析 $\overrightarrow{N_1}=(1,1,0)$，$\overrightarrow{N_2}=(1,-1,1)$，$\overrightarrow{N_1}\times\overrightarrow{N_2}=(1,-1,-2)$，

所求為 $1(x-1)-(y-1)-2(z+1)=0 \Rightarrow x-y-2z-2=0$.

9.空間中四點 $A(1,1,2)$，$B(-1,0,3)$，$C(2,0,-1)$，$D(3,k,1)$，求

(1)過 A，B，C 三點的平面方程式為____________ .

(2)若 A，B，C，D 四點共平面，則 $k=$____________ .

解答 (1)$4x-5y+3z-5=0$;(2)$k=2$

解析 (1) $\overrightarrow{AB}=(-2,-1,1)$，$\overrightarrow{AC}=(1,-1,-3)$，$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(4,-5,3)$，

平面 ABC $4(x-1)-5(y-1)+3(z-2)=0 \Rightarrow 4x-5y+3z-5=0$.

(2)$D(3,k,1)$代入平面 $12-5k+3-5=0 \Rightarrow k=2$.

10.求通過點 $A(1,3,5)$，且與三坐標軸之截距比為 1：3：5 之平面方程式為____________ .

解答 $\frac{x}{3}+\frac{y}{9}+\frac{z}{15}=1$

解析 設所求為 $\frac{x}{k}+\frac{y}{3k}+\frac{z}{5k}=1$（$k\neq 0$），將 $A(1,3,5)$代入得 $\frac{1}{k}+\frac{3}{3k}+\frac{5}{5k}=1 \Rightarrow k=3$，

所求為 $\frac{x}{3}+\frac{y}{9}+\frac{z}{15}=1$.

11.設 E_1：$2x+y+2z+3=0$，E_2：$x+y-2=0$，求 E_1，E_2 之夾角為____________ .

解答 45°或 135°

解析 $\overrightarrow{N_1}=(2,1,2)$，$\overrightarrow{N_2}=(1,1,0)$，$\cos\theta=\pm\frac{\overrightarrow{N_1}\cdot\overrightarrow{N_2}}{|\overrightarrow{N_1}||\overrightarrow{N_2}|}=\pm\frac{2+1}{\sqrt{4+1+4}\cdot\sqrt{2}}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$，

$\therefore \theta = 45°$或 $135°$．

12.設一平面過$(0, -2, 0)$，$(2, 0, 0)$與正 z 軸上點$(0, 0, c)$，且與 xy 平面之夾角為$30°$，求 c 值為______．

解答　$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

解析　設所求平面為$\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{-2}+\dfrac{z}{c}=1 \quad \Rightarrow \quad cx-cy+2z=2c \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{N_1}=(c,-c,2)$，

xy 平面 $\quad \Rightarrow \quad z=0 \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{N_2}=(0,0,1)$，

$$\cos 30° = \frac{\overrightarrow{N_1}\cdot\overrightarrow{N_2}}{|\overrightarrow{N_1}||\overrightarrow{N_2}|} = \quad \Rightarrow \quad \frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{2}{\sqrt{2c^2+4}\cdot\sqrt{1}} \quad \Rightarrow \quad 3(2c^2+4)=16 \quad \Rightarrow \quad c^2=\frac{4}{6}$$

$$\Rightarrow \quad c=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}=\pm\frac{\sqrt{6}}{3}\text{（取正）} \qquad \therefore c=\frac{\sqrt{6}}{3}$$．

13.空間四點 $A(1,1,2)$，$B(-1,0,3)$，$C(3,k,1)$，$D(2,0,-1)$，若四面體 $ABCD$ 的體積為 5，則實數 k 值為____________．

解答　8 或 -4

解析　$\overrightarrow{AB}=(-2,-1,1)$，$\overrightarrow{AC}=(2,k-1,-1)$，$\overrightarrow{AD}=(1,-1,-3)$，

$$\text{所求}=\frac{1}{6}\times\left|\begin{vmatrix}-2 & -1 & 1\\ 2 & k-1 & -1\\ 1 & -1 & -3\end{vmatrix}\right|=5 \Rightarrow |5k-10|=30 \Rightarrow |k-2|=6 \Rightarrow k=8\text{或}k=-4$$．

14.與平面 E：$x+y+z=1$ 平行，且與 $A(3, -5, 1)$，$B(-1, 3, 7)$等距之平面方程式為____________．

解答　$x+y+z-4=0$

解析　設所求為 $x+y+z+d=0$，

$$\frac{|3-5+1+d|}{\sqrt{3}}=\frac{|-1+3+7+d|}{\sqrt{3}} \Rightarrow \quad |d-1|=|d+9| \quad \Rightarrow d-1=\pm(d+9)$$

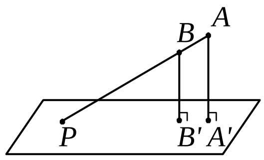
$\Rightarrow \quad d=-4$ 所求為 $x+y+z-4=0$．

15.$A(3, 1, 0)$，$B(-2, 4, 1)$，E：$x+2y-3z+5=0$，若直線 AB 交平面 E 於 P 點，求 $\overline{AP}:\overline{BP}=$_____．

解答　5：4

解析　二點代入平面均為正，表示在平面 E 之同側，

由圖知 $\overline{AP}:\overline{BP}=\overline{AA'}:\overline{BB'}=\dfrac{|3+2+5|}{\sqrt{14}}:\dfrac{|-2+8-3+5|}{\sqrt{14}}=10:8=5:4$．



16.平面 E_1：$x+y+z=7$ 與 E_2：$2x+2y+2z=5$ 之距離為____________．

解答　$\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

解析 E_1：$2x+2y+2z-14=0$，E_2：$2x+2y+2z-5=0$，$d=\dfrac{|-14-(-5)|}{\sqrt{4+4+4}}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ ．

17.通過 $A(1,2,3)$，$B(5,7,-3)$，$C(-3,1,1)$三點的平面方程式為____________．

解答 $x-2y-z=-6$

解析 $\overrightarrow{N}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(4,5,-6)\times(-4,-1,-2)=(-16,32,16)=-16(1,-2,-1)$

設 E：$x-2y-z=k$，過 $A(1,2,3)\Rightarrow k=1-4-3=-6$，$\therefore E$：$x-2y-z=-6$ ．

18.在空間中，E 為過 $A(2,1,-1)$，$B(1,2,-1)$，$C(1,1,3)$之平面，E'為過 $P(1,0,1)$，$Q(0,-2,1)$且與 E 垂直之平面，求 E'之方程式為____________．

解答 $2x-y-4z+2=0$

解析 $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(4,4,1)$，取 $\overrightarrow{N_E}=(4,4,1)$， $\overrightarrow{N_E}\times\overrightarrow{PQ}=(2,-1,-4)$，取 $\overrightarrow{N_{E'}}=(2,-1,-4)$，

$\therefore E':2(x-1)-y-4(z-1)=0\Rightarrow 2x-y-4z+2=0$ ．

19.點 $A(1,2,3)$對平面 $ax+by+cz-21=0$ 的對稱點 $A'(4,5,6)$，則序組$(a,b,c)=$____________．

解答 $(2,2,2)$

解析 $\overrightarrow{AA'}=(3,3,3)$，取 $\overrightarrow{N}=(1,1,1)$， $\overline{AA'}$ 中點$(\frac{5}{2},\frac{7}{2},\frac{9}{2})$，

所求平面為$1\cdot(x-\frac{5}{2})+1\cdot(y-\frac{7}{2})+1\cdot(z-\frac{9}{2})=0\Rightarrow 2x+2y+2z-21=0$，

故$(a,b,c)=(2,2,2)$ ．

20.若 $\overrightarrow{a}=(5,3,8)$，$\overrightarrow{b}=(2,-2,5)$，$\overrightarrow{c}=(k,k,0)$ 所張開之平行六面體之體積為 176，則 $k=$_________．

解答 ± 8

解析 $V=\left|\begin{vmatrix}k & k & 0\\ 5 & 3 & 8\\ 2 & -2 & 5\end{vmatrix}\right|=|15k+16k-25k+16k|=|22k|$， $\therefore |22k|=176\Rightarrow k=\pm 8$ ．

21.空間中，已知平面 E 通過$(3,0,0)$，$(0,4,0)$及正 z 軸上一點$(0,0,a)$，若平面 E 與 xy 平面夾角成 $45°$，則 $a=$________．

解答 $\dfrac{12}{5}$

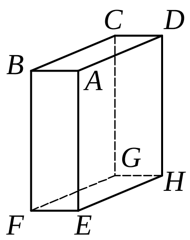
解析 設所求 E 之方程式為$\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{4}+\dfrac{z}{a}=1$， $a>0$，

$(4a)x+(3a)y+12z-12a=0$，法向量 $\overrightarrow{N_1}=(4a,3a,12)$，

取 xy 平面之法向量為 $\overrightarrow{N_2}=(0,0,1)$， $\cos 45°=\dfrac{\pm\overrightarrow{N_1}\cdot\overrightarrow{N_2}}{|\overrightarrow{N_1}||\overrightarrow{N_2}|}=\dfrac{\pm 12}{\sqrt{25a^2+144}}$，

$(\dfrac{\sqrt{2}}{2})^2=\dfrac{144}{25a^2+144}\Rightarrow a=\pm\dfrac{12}{5}$（取正）， $\therefore a=\dfrac{12}{5}$ ．

22.如圖，一長方體 $ABCD-EFGH$，$\overline{AB}=1$，$\overline{AD}=2$，$\overline{AE}=3$，求 A 點至$\triangle BDE$ 所在平面的距離______．

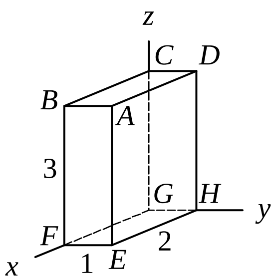


解答 $\frac{6}{7}$

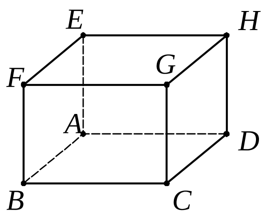
解析 建立坐標系：則 $A(2,1,3)$，$B(2,0,3)$，$D(0,1,3)$，$E(2,1,0)$，

$\overrightarrow{N}=\overrightarrow{BD}\times\overrightarrow{BE}=(-2,1,0)\times(0,1,-3)=-(3,6,2)$，

平面方程式：$3x+6y+2z-12=0$，$\therefore d=\frac{|6+6+6-12|}{7}=\frac{6}{7}$ ．



23.如圖，長方體 $ABCD-EFGH$，$\overline{AB}=3$，$\overline{AD}=4$，$\overline{AE}=6$，則(1)△CFH 的面積為____________；(2)頂點 A 到平面 CFH 的距離為____________ ．



解答 (1) $3\sqrt{29}$;(2) $\frac{24\sqrt{29}}{29}$

解析 (1)建立坐標系：

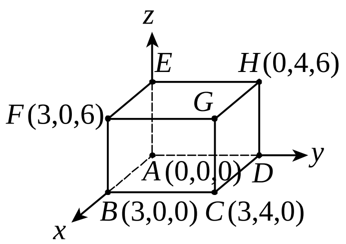
$\overrightarrow{CF}=(0,-4,6)$，$\overrightarrow{CH}=(-3,0,6)$

$\Rightarrow\overrightarrow{CF}\times\overrightarrow{CH}=(-24,-18,-12)$，

$\therefore$△$CFH=\frac{1}{2}|\overrightarrow{CF}\times\overrightarrow{CH}|$

$=\frac{1}{2}\sqrt{24^2+18^2+12^2}=\frac{1}{2}\sqrt{6^2(4^2+3^2+2^2)}=3\sqrt{29}$ ．

（亦可利用△CFH 的面積$=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{CF}|^2|\overrightarrow{CH}|^2-(\overrightarrow{CF}\cdot\overrightarrow{CH})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{52\cdot 45-36^2}=3\sqrt{29}$ ）．



(2)CFH 平面之 $\overrightarrow{N}=(-24,-18,-12)=-6(4,3,2)$，

$\therefore CFH$ 平面 K：$4x+3y+2z=24$，$\therefore d(A,K)=\dfrac{24}{\sqrt{29}}=\dfrac{24\sqrt{29}}{29}$.

24.求包含 y 軸，且與點 $A(0,0,5)$距離為 3 的平面方程式____________（兩解）.

解答 $4x+3z=0$ 或 $4x-3z=0$

解析 平面族，設 E：$x+kz=0$，$d(A,E)=\dfrac{|5k|}{\sqrt{1+k^2}}=3\Rightarrow|5k|^2=(3\sqrt{1+k^2})^2\Rightarrow k^2=\dfrac{9}{16}\Rightarrow k=\pm\dfrac{3}{4}$，

$\therefore$平面方程式：$x+\dfrac{3}{4}z=0$ 或 $x-\dfrac{3}{4}z=0\Rightarrow 4x+3z=0$ 或 $4x-3z=0$.