<table>
<tr><td colspan="6">高雄市明誠中學 高二數學複習測驗　　日期：100.12.27</td></tr>
<tr><td rowspan="2">範圍</td><td rowspan="2">3-2 向量內積(A)</td><td>班級</td><td>普二　　班</td><td rowspan="2">姓名</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>座號</td><td></td></tr>
</table>

一、填充題（ 每題 10 分 ）

1.設 $\overrightarrow{a}=(4,-3)$，則

(1)與 $\overrightarrow{a}$ 反向且長度為 8 的向量為__________；(2)向量 $(-1,2)$ 在 $\overrightarrow{a}$ 上的正射影為__________ .

解答 (1)$\left(-\frac{32}{5},\frac{24}{5}\right)$;(2)$\left(-\frac{8}{5},\frac{6}{5}\right)$

解析 (1)所求$=8\cdot\frac{-\overrightarrow{a}}{\left|\overrightarrow{a}\right|}=8\cdot\frac{-(4,-3)}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\frac{8}{5}(-4,3)=\left(-\frac{32}{5},\frac{24}{5}\right)$.

(2) $\overrightarrow{u}=(-1,2)$， $\overrightarrow{u}$ 在 $\overrightarrow{a}$ 的正射影

$=\left(\frac{\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{a}}{\left|\overrightarrow{a}\right|^2}\right)\overrightarrow{a}=\left(\frac{-4-6}{25}\right)(4,-3)=-\frac{2}{5}(4,-3)=\left(-\frac{8}{5},\frac{6}{5}\right)$.

2.設 $\overrightarrow{a}=(2,1)$， $\overrightarrow{b}=(1,-3)$， t 為實數，則

(1)$\left|\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}\right|$的最小值為__________；(2) $\overrightarrow{a}$ 在 $\overrightarrow{b}$ 上的正射影為__________ .

解答 (1)$\frac{7\sqrt{10}}{10}$;(2)$\left(-\frac{1}{10},\frac{3}{10}\right)$

解析 (1) $\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}=(2+t,1-3t)$，

$\therefore\left|\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}\right|=\sqrt{(2+t)^2+(1-3t)^2}=\sqrt{10t^2-2t+5}=\sqrt{10\left(t-\frac{1}{10}\right)^2+\frac{49}{10}}$，

$\therefore t=\frac{1}{10}$時， $\left|\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}\right|$的最小值為$\frac{7}{\sqrt{10}}=\frac{7\sqrt{10}}{10}$.

(2)所求$=\left(\frac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}}{\left|\overrightarrow{b}\right|^2}\right)\overrightarrow{b}=\left(\frac{2-3}{10}\right)(1,-3)=\left(-\frac{1}{10},\frac{3}{10}\right)$.

3.已知 $\overrightarrow{a}=(7,1)$， $\overrightarrow{b}=(3,4)$，求 (1) $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=$__________ . (2) $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 的夾角__________ .

解答 (1)25;(2)$45°$

解析 (1) $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=7\times3+1\times4=25$.

(2)設 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 的夾角為θ .因為$\left|\overrightarrow{a}\right|=\sqrt{7^2+1^2}=5\sqrt{2}$， $\left|\overrightarrow{b}\right|=\sqrt{3^2+4^2}=5$，

所以$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}}{\left|\overrightarrow{a}\right|\left|\overrightarrow{b}\right|}=\frac{25}{5\sqrt{2}\times5}=\frac{1}{\sqrt{2}}$. 故$\theta=45°$.

4.設k爲實數，$\overrightarrow{a}=(1,-3)$，$\overrightarrow{b}=(2,-1)$．若$\left(\overrightarrow{a}+k\overrightarrow{b}\right)\perp\overrightarrow{b}$，則$k$的值爲＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿．

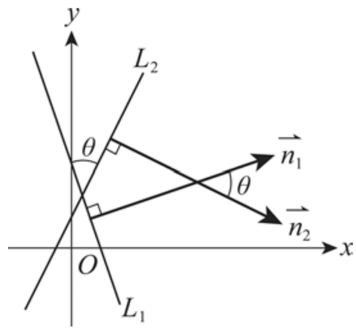
解答　-1

解析　因爲$\left(\overrightarrow{a}+k\overrightarrow{b}\right)\perp\overrightarrow{b}$，且$\overrightarrow{a}+k\overrightarrow{b}=(1,-3)+k(2,-1)=(1+2k,-3-k)$，

所以$\left(\overrightarrow{a}+k\overrightarrow{b}\right)\cdot\overrightarrow{b}=0$，即$(1+2k,-3-k)\cdot(2,-1)=0$．

$(1+2k)\times 2+(-3-k)\times(-1)=0$，整理得$5k+5=0$，解得$k=-1$．

5.求兩直線$L_1:3x+y-3=0$與$L_2:2x-y+1=0$的交角＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿．



解答　$45°$，$135°$

解析　L_1與L_2的法向量分別爲$\overrightarrow{n_1}=(3,1)$與$\overrightarrow{n_2}=(2,-1)$．

若$\overrightarrow{n_1}$與$\overrightarrow{n_2}$的夾角爲θ，

則$\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\left|\overrightarrow{n_2}\right|}=\dfrac{6-1}{\sqrt{10}\times\sqrt{5}}=\dfrac{5}{5\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$\theta=45°$．

故L_1與L_2有一交角爲$45°$，另一交角爲$180°-45°=135°$．

6.求兩平行直線L_1：$3x+4y+2=0$與L_2：$6x+8y+7=0$的距離＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿．

解答　$\dfrac{3}{10}$

解析　將L_1的方程式改寫爲$6x+8y+4=0$，兩平行直線間的距離公式，距離$d=\dfrac{|4-7|}{\sqrt{6^2+8^2}}=\dfrac{3}{10}$．

7.已知$\overrightarrow{a}=(7,4)$，$\overrightarrow{b}=(1,2)$，求$\overrightarrow{a}$在$\overrightarrow{b}$上的正射影及正射影的長＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿．

解答　(1)$(3,6)$;(2)$3\sqrt{5}$

解析　設$\overrightarrow{a}$在$\overrightarrow{b}$上的正射影爲$\overrightarrow{c}$．

(1)利用正射影公式，得$\overrightarrow{c}=\left(\dfrac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}}{\left|\overrightarrow{b}\right|^2}\right)\overrightarrow{b}=\left(\dfrac{7+8}{5}\right)\overrightarrow{b}=3\overrightarrow{b}=3(1,2)=(3,6)$．

(2)正射影的長爲$\left|\overrightarrow{c}\right|=\sqrt{3^2+6^2}=3\sqrt{5}$．

8.在$\triangle ABC$中，三頂點坐標爲$A(-2,3)$，$B(2,-2)$，$C(3,7)$，求

(1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=$＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿．　(2) $\angle BAC$的度數＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿．

解答　(1)0;(2)$90°$

解析　(1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=(4,-5)\cdot(5,4)=4\times 5+(-5)\times 4=0$．

(2) $\cos\angle BAC=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|}=\dfrac{0}{\sqrt{41}\times\sqrt{41}}=0$， $\angle BAC=90^\circ$.

9.已知 $\overrightarrow{a}=(k,2)$， $\overrightarrow{b}=(-4,3k-1)$，且 $\overrightarrow{a}\perp\overrightarrow{b}$，求 k 的值____________ .

解答 1

解析 因爲 $\overrightarrow{a}\perp\overrightarrow{b}$，所以 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=0$ $\Rightarrow$ $(k,2)\cdot(-4,3k-1)=0$ $\Rightarrow$ $k\times(-4)+2(3k-1)=0$

$\Rightarrow$ $2k-2=0$ $\Rightarrow$ $k=1$.

10.若 L_2 過 $(1,2)$ 且 L_2 與 L ： $x-y-5=0$ 之夾角等於 L_1 ： $2x+3y=0$ 與 L ： $x-y-5=0$ 之夾角，求 L_2 之方程式______________________ .

解答 $2x+3y-8=0$ 或 $3x+2y-7=0$

解析 設所求爲 $\dfrac{y-2}{x-1}=m\Rightarrow mx-y-m+2=0\Rightarrow\overrightarrow{N_2}=(m,-1)$， $\overrightarrow{N}=(1,-1)$， $\overrightarrow{N_1}=(2,3)$，

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{N_1}\cdot\overrightarrow{N}}{\left|\overrightarrow{N_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{N}\right|}=\frac{\overrightarrow{N_2}\cdot\overrightarrow{N}}{\left|\overrightarrow{N_2}\right|\cdot\left|\overrightarrow{N}\right|}=\frac{2-3}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{2}}=\frac{m+1}{\sqrt{m^2+1}\cdot\sqrt{2}}$$

$\Rightarrow 6m^2+13m+6=0\Rightarrow(3m+2)(2m+3)=0\Rightarrow m=-\dfrac{2}{3}$ 或 $m=-\dfrac{3}{2}$，

L_2 ： $2x+3y-8=0$ 或 $3x+2y-7=0$.

11.設 $A(1,4)$， $B(5,2)$， $C(3,6)$，求△ ABC 的垂心 H 之坐標____________ .

解答 $\left(\dfrac{7}{3},\dfrac{14}{3}\right)$

解析 設 $H(x,y)$，

$$\begin{cases}\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=0\\\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{AC}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(x-1,y-4)\cdot(-2,4)=0\\(x-5,y-2)\cdot(2,2)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-2(x-1)+4(y-4)=0\\2(x-5)+2(y-2)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-x+2y-7=0\\x+y-7=0\end{cases},$$

$\therefore H(x,y)=\left(\dfrac{7}{3},\dfrac{14}{3}\right)$.

12.若一直線過點 $(3,1)$ 且與直線 $x+\sqrt{3}y-3=0$ 夾角 60°，求其方程式____________ .

解答 $x-\sqrt{3}y-3+\sqrt{3}=0$ 與 $x=3$

解析 設所求爲 $y-1=m(x-3)\Rightarrow mx-y-3m+1=0$， $\overrightarrow{n_1}=(m,-1)$，

已知直線之法向量 $\overrightarrow{n_2}=(1,\sqrt{3})$， $\cos60^\circ=\pm\dfrac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{n_2}\right|}\Rightarrow\dfrac{1}{2}=\pm\dfrac{m-\sqrt{3}}{\sqrt{m^2+1}\cdot2}\Rightarrow m=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，

$\therefore$所求爲 $x-\sqrt{3}y-3+\sqrt{3}=0$ 與 $x=3$.

13.設 x 爲實數， $\overrightarrow{a}=(x,4)$， $\overrightarrow{b}=(1,2)$.若 $\overrightarrow{a}$ 在 $\overrightarrow{b}$ 上的正射影爲 $(-2,-4)$，則 x 的值爲__________ .

解答 -18

解析　利用正射影公式$\left(\dfrac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}}{\left|\overrightarrow{b}\right|^2}\right)\overrightarrow{b}$，$(-2,-4)=\left(\dfrac{x+8}{5}\right)\overrightarrow{b}$.

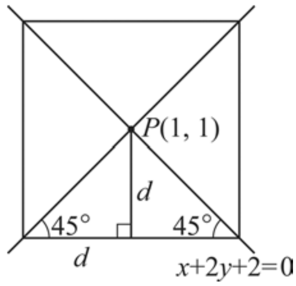
因爲$\overrightarrow{b}=(1,2)$，所以$\dfrac{x+8}{5}=-2 \quad\Rightarrow\quad x=-18$.

14.已知一正方形的中心爲$P(1,1)$，它一邊所在直線的方程式爲$x+2y+2=0$.

(1)求此正方形的面積__________ .　(2)求此正方形的兩對角線所在直線之方程式__________ .

解答　(1)20;(2) $x-3y+2=0$及$3x+y-4=0$

解析　(1)利用點到直線距離公式，得$d=\dfrac{|1+2\times1+2|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\dfrac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$.



正方形邊長$=2d=2\sqrt{5}$. 故正方形的面積$=\left(2\sqrt{5}\right)^2=20$.

(2)設所求直線的法向量$\overrightarrow{n_1}=(a,b)$. $x+2y+2=0$的法向量$\overrightarrow{n_2}=(1,2)$，

$$\cos45^\circ=\pm\frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\left|\overrightarrow{n_2}\right|} \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{\sqrt{2}}=\pm\frac{a+2b}{\sqrt{a^2+b^2}\times\sqrt{5}} .$$

兩邊平方，$\dfrac{1}{2}=\dfrac{(a+2b)^2}{5\left(a^2+b^2\right)} \quad\Rightarrow\quad 5\left(a^2+b^2\right)=2\left(a^2+4ab+4b^2\right)$

$\Rightarrow\quad 3a^2-8ab-3b^2=0 \quad\Rightarrow\quad (3a+b)(a-3b)=0$

$\Rightarrow\quad a=-\dfrac{1}{3}b$或$a=3b$.

所求直線的法向量爲$(1,-3)$或$(3,1)$，又兩對角線均過$P(1,1)$，

15.設直線L通過點$(-2,-3)$且與向量$\overrightarrow{u}=(1,2)$垂直，則直線L的方程式爲__________ .

解答　$x+2y+8=0$

解析　直線L與向量$\overrightarrow{u}=(1,2)$垂直$\Rightarrow$取直線L法向量$\overrightarrow{u}=(1,2)$

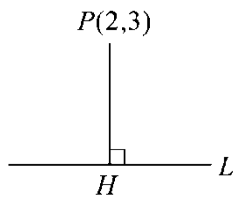
設所求爲$x+2y+k=0$，$(-2,-3)$代入得$-2-6+k=0\Rightarrow k=8$，$\therefore L$：$x+2y+8=0$.

16.設$3x+4y=1$，x、y爲實數，則$\sqrt{(x-5)^2+(y-4)^2}$的最小値爲__________ .

解答　6

解析　$\sqrt{(x-5)^2+(y-4)^2}=(5,4)$到直線$3x+4y-1=0$的距離爲最小値，$\therefore$所求$=\dfrac{|15+16-1|}{5}=6$.

17.已知點$P(2,3)$，直線L：$\begin{cases}x=-1+t\\y=2-t\end{cases}$，$t$爲實數，則



(1)設θ是直線L與y軸的一個夾角，θ爲__________；

(2) P點在直線L上的投影點爲__________；

(3) P點到直線L的距離爲__________ .

解答　(1) 45°或135°;(2) $(0,1)$;(3) $2\sqrt{2}$

解析 (1) $\overrightarrow{V_L}=(1,-1)$，$\overrightarrow{V_{y軸}}=(0,1)\Rightarrow\cos\theta=\pm\dfrac{(1,-1)\cdot(0,1)}{\sqrt{2}\cdot 1}=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$\therefore\theta=45°$ 或 $135°$.

(2) $H(-1+t,2-t)$，$\overrightarrow{PH}=(-3+t,-1-t)$，$\overrightarrow{PH}\cdot\overrightarrow{V_L}=0\Rightarrow -3+t+1+t=0\Rightarrow t=1$，$\therefore H(0,1)$.

(3) $\overline{PH}=\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$.

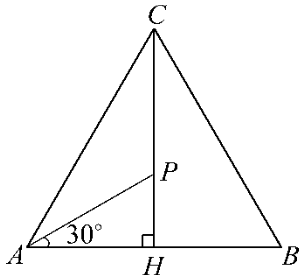
18.已知一正三角形的重心爲 $P(0,\ 1)$，且一邊所在直線的方程式爲 $3x+4y+1=0$.求此正三角形的面積__________.

解答 $3\sqrt{3}$

解析 P 是正三角形的重心，P 也是正三角形的內心． $\angle PAH=30°$.

又 $\overline{PH}=\dfrac{|3\times0+4\times1+1|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\dfrac{5}{5}=1$，故 $\overline{AH}=\sqrt{3}\times\overline{PH}=\sqrt{3}$.

P 爲重心， $\overline{CH}=3\overline{PH}=3$.故所求 $=\dfrac{2\sqrt{3}\times3}{2}=3\sqrt{3}$.



19.設 $A(a,\ 1)$，$B(2,\ -2)$ 與 $C(3,\ 4)$ 爲坐標平面上三點，而 O 爲原點．若向量 $\overrightarrow{OA}$ 與 $\overrightarrow{OB}$ 在向量 $\overrightarrow{OC}$ 上的正射影相同，求 a 的值__________.

解答 -2

解析 依題意及利用正射影公式，得 $\left(\dfrac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}}{\left|\overrightarrow{OC}\right|^2}\right)\overrightarrow{OC}=\left(\dfrac{\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}}{\left|\overrightarrow{OC}\right|^2}\right)\overrightarrow{OC}$

得 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}\Rightarrow(a,\ 1)\cdot(3,\ 4)=(2,\ -2)\cdot(3,\ 4)\Rightarrow 3a+4=-2\Rightarrow\ a=-2$.

20.設 $A(3,2)$，$B(1,4)$ 及直線 L：$y=mx-6$，若 $\overline{AB}$ 與 L 交於 P 且 $\overline{AP}:\overline{PB}=2:3$，則 $m=$__________.

解答 4

解析 $\overline{AP}:\overline{PB}=\dfrac{|3m-8|}{\sqrt{m^2+1}}:\dfrac{|m-10|}{\sqrt{m^2+1}}=|3m-8|:|m-10|=2:3$

$\Rightarrow 2|m-10|=3|3m-8|$

$\Rightarrow 77m^2-352m+176=0$

$\Rightarrow 7m^2-32m+16=0$

$\Rightarrow (m-4)(7m-4)=0$， $m=4$ 或 $\dfrac{4}{7}$，但 $\dfrac{4}{7}$ 代入使 A、B 同側（不合），故 $m=4$.