高雄市明誠中學 高二數學複習測驗 日期：100.11.22					
範圍	2-3 圓方程式(A)	班級	普二 班	姓名	
		座號			

一、填充題 (每題 10 分)

1. 圓心在$(-1，4)$，且通過$(2，0)$之圓的方程式為＿＿＿＿＿．．

解答 $(x+1)^2+(x-4)^2=25$

解析 圓心 $A(-1，4)$，過點 $P(2，0)$，則半徑 $r=\overline{AP}=\sqrt{(-1-2)^2+(4-0)^2}=5$ ．

圓的方程式為 $(x+1)^2+(x-4)^2=25$

2. 圓 $3x^2+3y^2+9x-6y+1=0$ 的圓心坐標為＿＿＿＿＿．

解答 $(-\frac{3}{2}，1)$

解析 $x^2+y^2+3x-2y+\frac{1}{3}=0 \quad \Rightarrow \quad (x+\frac{3}{2})^2+(y-1)^2=\frac{9}{4}+1-\frac{1}{3}=\frac{35}{12}$，圓心$(-\frac{3}{2}，1)$．

3. 在坐標平面上，已知兩個定點 $A(3,5)$，$B(-10,4)$；以 $\overline{AB}$ 為直徑的圓方程式為＿＿＿＿＿．（必須寫成 $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$ 的形式）

解答 $x^2+y^2+7x-9y-10=0$

解析 由直徑式 $(x-3)(x+10)+(y-5)(y-4)=0 \Rightarrow x^2+y^2+7x-9y-10=0$

4. 在坐標平面上，已知兩定點 $A(3，5)$，$B(-10，4)$；設 $P(x，y)$為動點且知 $\overline{PA}：\overline{PB}=2：3$，則動點 $P(x，y)$之軌跡方程式為＿＿＿＿．（以上皆必須寫成 $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$ 的形式）

解答 $5x^2+5y^2-134x-58y-158=0$

解析 由已知 $\overline{PA}：\overline{PB}=2：3$ 得 $\sqrt{(x-3)^2+(y-5)^2}：\sqrt{(x+10)^2+(y-4)^2}=2：3$，

$\therefore \quad 9[(x-3)^2+(y-5)^2]=4[(x+10)^2+(y-4)^2]$

$\Rightarrow \quad 9(x^2+y^2-6x-10y+34)=4(x^2+y^2+20x-8y+116)$

$\Rightarrow \quad 5x^2+5y^2-134x-58y-158=0$ ．

5. 圓心在直線 $y=2x+3$ 上，且過兩點$(1，2)$，$(-2，3)$的圓之方程式為＿＿＿＿＿．

解答 $(x+1)^2+(y-1)^2=5$

解析 設圓心 $Q(a，b)$，圓心在直線 $y=2x+3$ 上，$\therefore \quad b=2a+3$……①，

設 $A(1，2)$，$B(-2，3)$，則 $\overline{QA}=\overline{QB}$

$\Rightarrow \quad (a-1)^2+(b-2)^2=(a+2)^2+(b-3)^2 \quad \Rightarrow \quad b=3a+4$……②，

解①②得 $a=-1$，$b=1$，又 $\overline{QA}=\sqrt{(a-1)^2+(b-2)^2}=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}$，

故所求圓的方程式為$(x+1)^2+(y-1)^2=5$ ．

6. 直線 $y=mx+2$ 通過圓 $x^2+y^2+2x-6y-1=0$ 之圓心，則 $m=$＿＿＿＿＿．

解答 -1

解析　$x^2+y^2+2x-6y-1=0 \quad\Rightarrow\quad (x+1)^2+(y-3)^2=11$，

$\therefore\quad y=mx+2$ 過$(-1，3)\quad\Rightarrow\quad m=-1$．

7. 已知一圓通過兩點 $A(1,-2)$和 $B(4,3)$，且圓心在 y 軸上，則此圓的方程式爲____________．

解答　$x^2+(y-2)^2=17$

解析　設圓心坐標爲 $O(0，b)$，此圓過 $A(1，-2)$及 $B(4，3)$，則 $\overline{AO}=\overline{BO}$，

$\therefore\quad (-1)^2+(b+2)^2=(-4)^2+(b-3)^2\Rightarrow 1+b^2+4b+4=16+b^2-6b+9\Rightarrow 10b=20$

$\Rightarrow\quad b=2$，半徑$=\sqrt{(-1)^2+(2+2)^2}=\sqrt{17}$，即此圓方程式爲 $x^2+(y-2)^2=17$．

8. 設 $A(-1，3)$，$B(2，4)$，$C(6，2)$，$\triangle ABC$ 之外接圓方程式爲____________．

解答　$x^2+y^2-4x+2y-20=0$

解析　代入 $x^2+y^2+dx+ey+f=0$

$$\begin{cases}-d+3e+f+10=0\\2d+4e+f+20=0\\6d+2e+f+40=0\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}3d+e+10=0\\4d-2e+20=0\end{cases}\quad\Rightarrow\quad 10d+40=0$$

$\Rightarrow\quad d=-4，e=2，f=-20\quad\Rightarrow x^2+y^2-4x+2y-20=0$

9. 坐標平面上，$A(0,-1),\ B(1,0),\ C(2,-1)$．

(1)$\triangle ABC$ 的外接圓方程式爲____________．

(2)若點 $P(x,y)$ 爲外接圓上任一點，則 $x+y$ ①最大值爲__________，②最小值爲__________．

解答　(1) $x^2+y^2-2x+2y+1=0$;(2)① $\sqrt{2}$;② $-\sqrt{2}$

解析　(1)求 $\overline{AB}$ 的垂直平分線方程式爲 $x+y=0\cdots\cdots$①，

$\overline{BC}$ 的垂直平分線方程式爲 $x-y-2=0\cdots\cdots$②，

解①②得 $x=1$，$y=-1$，即圓心 $P(1,\ -1)$，半徑 $r=\overline{AP}=1$，

故圓方程式爲 $(x-1)^2+(y+1)^2=1$，即 $x^2+y^2-2x+2y+1=0$．

(2)設 $x+y=k$，直線 L：$x+y=k$ 與圓 C：$x^2+y^2-2x+2y+1=0$，相切或相割，

故將 $y=-x+k$ 代入 C，得 $x^2+(-x+k)^2-2x+2(-x+k)+1=0$，

整理後　$2x^2+(-2k-4)x+(k^2+2k+1)=0$，

方程式有二相異實根或二相等實根，判別式大於或等於 0，

即 $(-2k-4)^2-8(k^2+2k+1)\ge 0\Rightarrow -4k^2+8\ge 0$，$k^2-2\le 0$，$-\sqrt{2}\le k\le\sqrt{2}$，

故 $x+y$ 的最大值爲 $\sqrt{2}$，最小值爲 $-\sqrt{2}$．

10.圓 C：$x^2+y^2-6x-8y+16=0$，

(1)以點(1，2)爲對稱點的圖形方程式爲____________．

(2)以直線 $y=-x$ 爲對稱軸的圖形方程式爲____________．

解答　(1) $(x+1)^2+y^2=9$;(2) $(x+4)^2+(y+3)^2=9$

解析　配方 C：$(x-3)^2+(y-4)^2=3^2$，圓心 $A(3，4)$，半徑 $r=3$．

《Sol 一》

(1)A 關於(1，2)之對稱點爲$(2-3，4-4)=(-1，0)$，

$\therefore$ 對稱圓的方程式爲$(x+1)^2+y^2=3^2$．(對稱圓半徑不變)

(2)A 關於 $y=-x$ 的對稱點爲$(-4，-3)$，對稱圓的方程式爲$(x+4)^2+(y+3)^2=3^2$．

《Sol 二》

(1) 新圖形上點$(x，y)$對$(1，2)$的對稱點爲$(2-x，4-y)$在原圖形上

以$(2-x，4-y)$代入 C 得$(2-x-3)^2+(4-y-4)^2=9 \Rightarrow (x+1)^2+y^2=9$．

(2) 新圖形上點$(x，y)$對 $y=-x$ 的對稱點爲$(-y，-x)$ 在原圖形上

以$(-y，-x)$代入 C 得$(-y-3)^2+(-x-4)^2=9 \Rightarrow (x+4)^2+(y+3)^2=9$．

11.若二元二次方程式 $x^2+y^2-8x-5y+k=0$ 之圖形爲一圓，則：

(1)實數 k 的範圍爲____________．

(2)又此圓與 x 軸相切，則 k 之值爲____________．

解答 (1) $k<\dfrac{89}{4}$;(2) 16

解析 (1)圓判別式：$d^2+e^2-4f=(-8)^2+(-5)^2-4k>0 \Rightarrow k<\dfrac{89}{4}$．

(2)$\begin{cases} C：x^2+y^2-8x-5y+k=0\cdots\cdots① \\ x\text{ 軸}：y=0\cdots\cdots② \end{cases}$， ②代入① $\Rightarrow x^2-8x+k=0$，

$\because$ 相切，$\therefore$ $D=(-8)^2-4k=0$，得 $k=16$．

12.一圓 C 過點$(2，1)$且與兩坐標軸均相切，則圓 C 的方程式爲____________．（有兩解）

解答 $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ 或 $(x-5)^2+(y-5)^2=25$

解析 圓 C 過第一象限的點$(2，1)$且與 x 軸，y 軸均相切

$\Rightarrow$ 圓心必在第一象限內且與 x 軸，y 軸等距，

設圓心$(a，a)$，且半徑 a，則圓的方程式爲$(x-a)^2+(y-a)^2=a^2$，

過點$(2，1) \Rightarrow (2-a)^2+(1-a)^2=a^2 \Rightarrow a^2-6a+5=0 \Rightarrow a=1$ 或 $a=5$，

故圓的方程式爲$(x-1)^2+(y-1)^2=1$ 或 $(x-5)^2+(y-5)^2=25$．

13.二圓 $C_1：x^2+y^2+3x+3y-8=0$，$C_2：x^2+y^2+7x+6y-10=0$ 相交於二點 A，B，則以 $\overline{AB}$ 爲直徑的圓方程式爲____________．

解答 $x^2+y^2-x-6=0$

解析 $C_1：x^2+y^2+3x+3y-8=0$，$C_2：x^2+y^2+7x+6y-10=0$，

C_1，C_2 根軸(交點弦) $L：(x^2+y^2+3x+3y-8)-(x^2+y^2+7x+6y-10)=0$

$\Rightarrow 4x+3y-2=0$，

設通過 A，B 的圓系方程式爲$(x^2+y^2+3x+3y-8)+k(4x+3y-2)=0$

$\Rightarrow x^2+y^2+(4k+3)x+(3k+3)y-8-2k=0$

$\Rightarrow (x+\dfrac{4k+3}{2})^2+(y+\dfrac{3k+3}{2})^2=8+2k+\dfrac{(4k+3)^2}{4}+\dfrac{(3k+3)^2}{4}=\dfrac{25}{4}(k^2+2k+2)$，

以 $\overline{AB}$ 爲直徑的圓，即此圓系中的最小圓，

即圓心 $(-\dfrac{4k+3}{2}，-\dfrac{3k+3}{2})$ 在根軸 $4x+3y-2=0$ 上 $\Rightarrow k=-1$．

故所求圓的方程式爲 $x^2+y^2-x-6=0$

14.點(6，3)到圓 $x^2+y^2-4x+2y+3=0$ 的最短距離 d，最長距離 D，則$(d, D)=$ ____________ .

解答 $(3\sqrt{2}, 5\sqrt{2})$

解析 $x^2+y^2-4x+2y+3=0 \Rightarrow (x-2)^2+(y+1)^2=2$，圓心 $A(2, -1)$，半徑 $r=\sqrt{2}$，

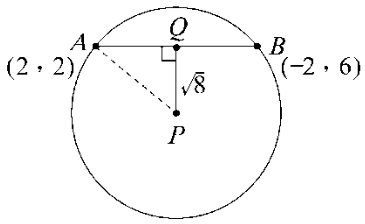
設 $P(6, 3)$，$\because\ 6^2+3^2-24+6+3>0$，$\therefore\ P$ 點在圓外，

$\therefore\ d=\overline{PA}-r=\sqrt{16+16}-\sqrt{2}=4\sqrt{2}-\sqrt{2}=3\sqrt{2}$，

$D=\overline{PA}+r=4\sqrt{2}+\sqrt{2}=5\sqrt{2}$.

15.設 $A(2, 2)$，$B(-2, 6)$為坐標平面上兩點，若 $\overline{AB}$ 為圓之一弦且距圓心 $\sqrt{8}$，則圓方程式為 ____________ .（有兩解）

解答 $(x-2)^2+(y-6)^2=16$ 或$(x+2)^2+(y-2)^2=16$



解析 設圓心 $P(h, k)$，弦中點 $Q(\frac{2-2}{2}, \frac{2+6}{2})=(0, 4)$，

$\because\ \overline{PQ}=\sqrt{8}$，$\therefore h^2+(k-4)^2=8$ ⋯⋯①，

又 $\overline{PQ}\perp\overline{AB}$，$\therefore\ m_{\overline{PQ}}\times m_{\overline{AB}}=-1 \Rightarrow \frac{k-4}{h}\times\frac{6-2}{-2-2}=-1$，

$\therefore h-k=-4$ ⋯⋯②，

由①②得 $h=2$，$k=6$ 或 $h=-2$，$k=2$ 且 $r^2=\overline{PA}^2=16$，

則圓方程式為$(x-2)^2+(y-6)^2=16$ 或$(x+2)^2+(y-2)^2=16$.

16.圓 $C: x^2+y^2-4x+2y-4=0$ 的內部及圓上共有____________個格子點 .

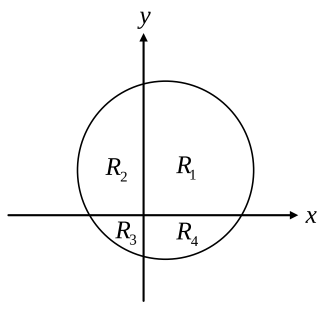
解答 29

解析 $(x-2)^2+(y+1)^2\le 9$，

x	2	1，3	0，4	−1，5
y	−4～2	−3～1	−3～1	−1
	↓	↓	↓	↓
	7 個	10 個	10 個	2 個

⇒ 共 29 個 .

17.在坐標平面上有一個圓，其圓心坐標為(5, 12)且半徑為 20，若此圓分布在第一、二、三、四象限內的區域面積分別為 R_1、R_2、R_3、R_4（如圖所示），則 $R_1-R_2+R_3-R_4$ 之值= ________ .



解答 240

解析 作 $x=0$，$x=10$，$y=0$，$y=24$ 四條直線，

如圖只分 9 個區域 ⇒ 中央矩形面積$=10\times 24=240$，

$\therefore R_1=A+B+R_3+240$，

$R_2=A+R_3$，

$R_4=B+R_3$

$\Rightarrow R_1-R_2+R_3-R_4$

$=(A+B+R_3+240)-(A+R_3)+R_3-(B+R_3)=240$.