高雄市明誠中學 高二數學複習測驗 日期：100.11.28					
範圍	2-3 圓方程式(B)	班級	普二 班	姓名	
		座號			

一、填充題（ 每題 10 分 ）

1.圓心在直線 $2x-3y-5=0$ 上，且通過兩點(6，0)，(5，3)的圓的方程式為＿＿＿＿＿＿．

解答 $(x-4)^2+(y-1)^2=5$

解析 設圓心 $P(a，b)$，因圓心在直線 $2x-3y-5=0$ 上，所以 $2a-3b=5$……①，
又圓通過兩點 $A(6，0)$，$B(5，3)$，所以 $\overline{PA}=\overline{PB}$，
故 $(a-6)^2+b^2=(a-5)^2+(b-3)^2 \Rightarrow a-3b=1$……②，
解①②得 $a=4$，$b=1$，故圓心 $P(4，1)$，半徑 $r=\overline{PA}=\sqrt{(-2)^2+1^2}=\sqrt{5}$，
所求圓的方程式為 $(x-4)^2+(y-1)^2=5$．

2.已知圓 C_2 與圓 C_1：$x^2+y^2-2x-4y-4=0$ 有相同的圓心，且平分 C_1 的面積，則 C_2 的方程式為＿＿＿＿．

解答 $(x-1)^2+(y-2)^2=\dfrac{9}{2}$

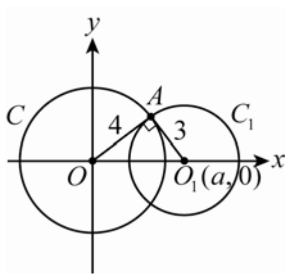
解析 C_1：$(x-1)^2+(y-2)^2=3^2$，設 C_2：$(x-1)^2+(y-2)^2=r^2$，
因 C_2 的面積為 C_1 面積的一半，所以 $\pi r^2=\dfrac{9}{2}\pi \Rightarrow r^2=\dfrac{9}{2}$，故 C_2：$(x-1)^2+(y-2)^2=\dfrac{9}{2}$．

3.三直線 $3x+y=5$，$2x-y=5$，$x-3y=-5$ 所圍成三角形的外接圓之方程式為＿＿＿＿＿＿．

解答 $x^2+y^2-6x-2y+5=0$

解析 三角形頂點坐標 $3x+y=5$……①，$2x-y=5$……②，$x-3y=-5$……③，
解①②得交點(2，－1)，解①③得交點(1，2)，解②③得交點(4，3)，
設三角形外接圓的方程式為 $x^2+y^2+dx+ey+f=0$，
頂點代入 $\begin{cases}4+1+2d-e+f=0\\1+4+d+2e+f=0\\16+9+4d+3e+f=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2d-e+f=-5\\d+2e+f=-5\\4d+3e+f=-25\end{cases} \Rightarrow d=-6，e=-2，f=5$，
所求圓的方程式為 $x^2+y^2-6x-2y+5=0$．

4.一圓 C_1 的圓心 O_1 在 x 軸上，半徑為 3，且與圓 C：$x^2+y^2=16$ 交於 A 點，設 O 為圓 C 的圓心，且 $\angle OAO_1=90°$，則圓 C_1 的方程式為＿＿＿＿＿＿．



解答 $(x\pm5)^2+y^2=9$

解析 設所求圓的圓心 $O_1(a，0)$，兩圓一交點 A，兩圓正交，即 $\angle OAO_1=90°$
$\Rightarrow \overline{OO_1}^2=\overline{OA}^2+\overline{O_1A}^2 \Rightarrow a^2=4^2+3^2=5^2 \Rightarrow a=\pm5$，
$(x\pm5)^2+y^2=3^2$ 為所求．

5.設 $A(3，2)$，$B(-1，5)$，若點 P 滿足 $\overline{PA}=2\overline{PB}$，則一切 P 點所成圖形的方程式為 $3x^2+3y^2+dx+ey+f=0$，求數對$(d，e，f)$＝＿＿＿＿＿＿．

解答 (14，－36，91)

解析 設點 P 為$(x，y)$，則 $\overline{PA}=2\overline{PB} \Rightarrow \overline{PA}^2=4\overline{PB}^2$
$\Rightarrow (x-3)^2+(y-2)^2=4[(x+1)^2+(y-5)^2] \Rightarrow 3x^2+3y^2+14x-36y+91=0$，
$\therefore (d，e，f)=(14，-36，91)$．

6.坐標平面上，圓 C 過點 $A(1，4)$與 $B(0，3)$，圓心在 x 軸上，則圓 C 方程式爲____________.

解答 $(x-4)^2+y^2=25$

解析 設圓心 P 爲$(t，0)$，則 $\overline{PA}^2=\overline{PB}^2 \Rightarrow (t-1)^2+(-4)^2=(t-0)^2+(-3)^2 \Rightarrow t=4$，

圓心 $P(4，0)$，半徑 $r^2=\overline{PB}^2=t^2+(-3)^2=25$，$\therefore$ 圓 $C：(x-4)^2+y^2=25$.

7.圓 $x^2+y^2+ax+by+2=0$ 與 x 軸交於兩點 $A(x_1，0)$，$B(x_2，0)$，與 y 軸交於兩點 $C(0，y_1)$，$D(0，y_2)$，且 $\overline{AB}$ 中點$(2，0)$，$\overline{CD}$ 中點$(0，2)$，則此圓的圓心坐標爲____________.

解答 $(2，2)$

解析 圓的圓心爲 $\overline{AB}$ 與 $\overline{CD}$ 的中垂線交點，$\because$ $\overline{AB}$ 中點$(2，0)$，$\overline{CD}$ 中點$(0，2)$，

$\therefore$ $\overline{AB}$，$\overline{CD}$ 中垂線方程式分別爲 $x=2$ 及 $y=2$，其交點爲$(2，2)$.

8.過圓 $C：x^2+y^2-2x+4y-11=0$ 內一點 $A(-2，-1)$的所有弦的中點軌跡方程式爲____________.

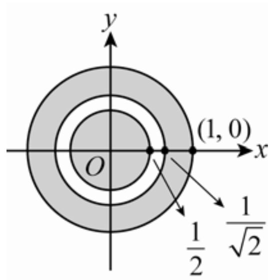
解答 $x^2+y^2+x+3y=0$

解析 $C：(x-1)^2+(y+2)^2=4^2$，圓心 $B(1，-2)$，

圓內過 $A(-2，-1)$的所有弦的中點軌跡爲以 $\overline{AB}$ 爲直徑之圓，

其方程式爲$(x-1)(x+2)+(y+2)(y+1)=0$，即 $x^2+y^2+x+3y=0$.

9.$(x^2+y^2-1)(x^2+y^2-\frac{1}{2})(x^2+y^2-\frac{1}{4})\le 0$ 的圖形面積=____________.



解答 $\frac{3\pi}{4}$

解析 $(x^2+y^2-1)(x^2+y^2-\frac{1}{2})(x^2+y^2-\frac{1}{4})\le 0$ 的圖形如下圖陰影部分，

其面積$=\pi\cdot 1-\pi\cdot\frac{1}{2}+\pi\cdot\frac{1}{4}=\frac{3\pi}{4}$.

10.設方程式 $x^2+y^2-2mx+2(m-2)y+4m^2-2=0$ 之圖形爲一圓，若 $m=a$ 時，使圓之面積 b 爲最大，則數對$(a，b)=$____________.

解答 $(-1，8\pi)$

解析 原式 $\Rightarrow$ $C：(x^2-2mx+m^2)+[y^2+2(m-2)y+(m-2)^2]=-4m^2+2+m^2+(m-2)^2$，

$r^2=-2m^2-4m+6=-2(m+1)^2+8$，當 $m=-1$ 時，$r^2=8$，即最大面積 $\pi r^2=8\pi$.

11.設方程式 $x^2+y^2=|x|+|y|$在坐標平面上的圖形是 Γ，則：(1)Γ 的周長=________. (2)Γ 所圍成區域面積=_______.

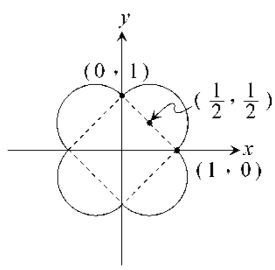
解答 (1) $2\sqrt{2}\pi$;(2)$\pi+2$

解析 $C：x^2+y^2=|x|+|y|$，

以$-x$ 代 x，$-y$ 代 y，原式不變，則圖形對稱 y 軸； x 軸，

先作 $x\ge 0$，$y\ge 0$，則 $C：x^2+y^2-x-y=0 \Rightarrow (x-\frac{1}{2})^2+(y-\frac{1}{2})^2=\frac{1}{2}$，

而圖形對稱 x 軸及 y 軸，故其圖形如右：



周長$=4\times(\frac{1}{2}\cdot 2\pi r)=4\pi\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}\,\pi$，面積$=4\,(\frac{1}{2}\pi r^2+\frac{1}{2}\times 1\times 1)=\pi+2$.

12.已知直線 L：$4x+3y+4=0$ 與圓 C：$x^2+y^2-6x-6y-7=0$ 相切，則切點坐標為____________.

解答　$(-1,0)$

解析　圓 C：$x^2+y^2-6x-6y-7=0 \Rightarrow (x-3)^2+(y-3)^2=25$，圓心 $A(3,3)$，半徑 $r=5$，

過 A 且垂直 L：$4x+3y+4=0$ 的直線方程式為 $3x-4y+3=0$，

$\therefore$ 切點：$\begin{cases}4x+3y+4=0\\3x-4y+3=0\end{cases}$，得 $(x,y)=(-1,0)$．

13.圓心在第一象限，通過 $A(1,1)$ 和 $B(2,2)$ 兩點且與 x 軸相切的圓方程式為____________.

解答　$(x-2)^2+(y-1)^2=1$

解析　圓心在第一象限，且與 x 軸相切，設半徑 r，圓心 (h,r)，$h>0$，$r>0$，

$\therefore$ 圓方程式：$(x-h)^2+(y-r)^2=r^2$，過 $(1,1)$，$(2,2)$

$\Rightarrow \begin{cases}(1-h)^2+(1-r)^2=r^2\\(2-h)^2+(2-r)^2=r^2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}1-2h+h^2+1-2r=0\cdots\cdots①\\4-4h+h^2+4-4r=0\cdots\cdots②\end{cases}$，

$①\times 2-②$ 得 $h^2-4=0$，$\therefore$ $h=2$ 代入①得 $r=1$，$\therefore$ 圓方程式為 $(x-2)^2+(y-1)^2=1$．

14.一圓 C 過點 $(2,1)$ 且與兩坐標軸均相切，則圓 C 的方程式為____________.（有兩解）

解答　$(x-1)^2+(y-1)^2=1$ 或 $(x-5)^2+(y-5)^2=25$

解析　圓 C 過第一象限的點 $(2,1)$ 且與 x 軸，y 軸均相切

$\Rightarrow$ 圓心必在第一象限內且與 x 軸，y 軸等距，

設圓心 (r,r)，半徑 r，則圓的方程式為 $(x-r)^2+(y-r)^2=r^2$，

過點 $(2,1) \Rightarrow (2-r)^2+(1-r)^2=r^2 \Rightarrow r^2-6r+5=0 \Rightarrow r=1$ 或 $r=5$，

故圓的方程式為 $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ 或 $(x-5)^2+(y-5)^2=25$．

15.設 $k\in\mathbb{R}$，已知點 $P(-1,7)$ 在圓 C：$x^2+y^2+kx+(k-2)y-12=0$ 上，則圓 C 過 P 點的切線方程式為____________.

解答　$3x-4y+31=0$

解析　點 $P(-1,7)$ 在 $x^2+y^2+kx+(k-2)y-12=0$ 圓上 $\Rightarrow 1^2+7^2-k+7k-14-12=0 \Rightarrow k=-4$，

$\therefore$ 圓 C：$x^2+y^2-4x-6y-12=0$，代入切線公式：$-x+7y-\frac{4}{2}(x-1)-\frac{6}{2}(y+7)-12=0$

$\Rightarrow -x+7y-2x+2-3y-21-12=0 \Rightarrow 3x-4y+31=0$．

16.若圓 $x^2+y^2-6x+ky+\ell=0$ 切直線 $3x-4y=8$ 於點 $(4,1)$，則 $2k+\ell$ 的值為____________.

解答　$\frac{7}{3}$

解析　圓 $x^2+y^2-6x+ky+\ell=0$ 切直線 $3x-4y=8$ 於點 $(4,1)$，

故圓在點 $(4,1)$ 的切線方程式 $4x+y-6\cdot\frac{4+x}{2}+k\frac{1+y}{2}+\ell=0$

$\Rightarrow 2x+(2+k)y+k+2\ell-24=0$，此與 $3x-4y-8=0$ 同一直線，

$\therefore$ $\frac{2}{3}=\frac{2+k}{-4}=\frac{k+2\ell-24}{-8}$，解得 $k=\frac{-14}{3}$，$\ell=\frac{35}{3}$，所求 $2k+\ell=\frac{-28}{3}+\frac{35}{3}=\frac{7}{3}$．

17.一圓的方程式為 $x^2+y^2-2x+4y-20=0$，考慮此圓兩互相垂直切線的交點，所有這種交點所成圖

形的方程式為＿＿＿＿＿＿＿＿＿．

解答 $(x-1)^2+(y+2)^2=50$

解析 圓 C：$(x-1)^2+(y+2)^2=25$，圓心 $O(1,-2)$，設 $P(x,y)$在圓外，

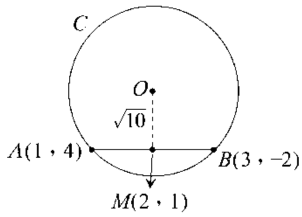
過 P 作圓 C 的兩條切線，切點為 A，B，$\overline{PA}\perp\overline{PB}$，又$\overline{OA}\perp\overline{PA}$，$\overline{OB}\perp\overline{PB}$，

$\therefore$ $OAPB$ 為正方形 $\Rightarrow$ $\overline{OA}=\overline{OB}=5$，$\overline{OP}=5\sqrt{2}$，即 P 與 O 的距離為定值 $5\sqrt{2}$，

故圖形方程式：$(x-1)^2+(y+2)^2=50$．

18.設 $A(1,4)$與 $B(3,-2)$為坐標平面上兩點，若 $\overline{AB}$ 為圓 C 的一弦，且距離圓心為 $\sqrt{10}$，求圓 C 的方程式為＿＿＿＿＿＿＿．（有兩解）

解答 $(x+1)^2+y^2=20$ 或$(x-5)^2+(y-2)^2=20$



解析 $\overline{AB}=\sqrt{(3-1)^2+(-2-4)^2}=2\sqrt{10}$，$\therefore$ 圓 C 半徑$=\sqrt{10+10}=\sqrt{20}$，

設圓心 $O(a,b)$，$\overline{AB}$ 中點 $M(2,1)$，

$$\begin{cases} m_{\overline{OM}}\cdot m_{\overline{AB}}=-1 \\ \overline{OM}=\sqrt{10} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{b-1}{a-2}\times(-3)=-1\cdots\cdots① \\ (a-2)^2+(b-1)^2=10\cdots\cdots② \end{cases},$$

由①$\Rightarrow a=3b-1$ 代入②得 $b=0$ 或 2，代回①$a=-1$ 或 5，故$(a,b)=(-1,0)$或$(5,2)$，

$\therefore$圓 C：$(x+1)^2+y^2=20$ 或$(x-5)^2+(y-2)^2=20$．

19.(1)設有一圓 C：$x^2+y^2-4x-4y-2=0$，$A(1,5)$，過 A 之切線方程式為＿＿＿＿＿＿＿＿＿．

(2)承上題，$B(-1,-5)$，過 B 作圓 C 之二切線，切點為 P，Q，則直線 PQ 之方程式為＿＿＿＿＿＿＿＿＿．

(3)承上題，$\triangle BPQ$ 之外接圓為 $x^2+y^2+ax+by+c=0$，則序組$(a,b,c)=$＿＿＿＿＿＿＿＿＿．

解答 (1) $x-3y+14=0$;(2) $3x+7y-10=0$;(3) $(-1,3,-12)$

解析 (1)$A\in$ 圓 C $\Rightarrow$ 切線為 $1\cdot x+5\cdot y-4\cdot\dfrac{x+1}{2}-4\cdot\dfrac{y+5}{2}-2=0$

$\Rightarrow$ $-x+3y-14=0$ $\Rightarrow$ $x-3y+14=0$．

(2)$B\in$ 圓 C 之外部 $\Rightarrow$ 切點弦 $\overline{PQ}$ 所在之直線為 $-1\cdot x-5\cdot y-4\cdot\dfrac{x-1}{2}-4\cdot\dfrac{y-5}{2}-2=0$

$\Rightarrow$ $-3x-7y+10=0$ $\Rightarrow$ $3x+7y-10=0$．

(3)所求為以 $\overline{OB}$ 為直徑的圓，其中 $O(2,2)$為圓 C 之圓心，

$\therefore(x-2)(x+1)+(y-2)(y+5)=0\Rightarrow x^2+y^2-x+3y-12=0\Rightarrow(a,b,c)=(-1,3,-12)$．

20.自點 $P(6,2)$作圓 $x^2+y^2-8x+6y+21=0$ 的切線，切點 A，B，求：

(1)二切線方程式為＿＿＿＿＿＿．(2)直線 AB 的方程式為＿＿＿＿＿．(3)$\triangle PAB$ 的外接圓方程式為＿＿＿＿＿．

解答 (1) $21x-20y-86=0$，$x-6=0$;(2) $2x+5y+3=0$;(3) $x^2+y^2-10x+y+18=0$

解析 (1)設切線 L：$y-2=m(x-6)$，$\therefore y=m(x-6)+2$ 代入圓 C

$\Rightarrow x^2+[m(x-6)+2]^2-8x+6[m(x-6)+2]+21=0$

$\Rightarrow(m^2+1)x^2+(-12m^2+10m-8)x+(36m^2-60m+37)=0$，

$\because$相切，$\therefore$判別式 $D=(-12m^2+10m-8)^2-4(m^2+1)(36m^2-60m+37)=0$

$\Rightarrow 20m-21=0$，$\therefore m=\dfrac{21}{20}\Rightarrow$ 另一切線斜率不存在，表過 P 的鉛直線，

即二切線方程式為 $y-2=\dfrac{21}{20}(x-6)$，$\therefore 21x-20y-86=0$ 或 $x-6=0$．

(2) $\overleftrightarrow{AB}$ ： $6x+2y-8(\frac{x+6}{2})+6(\frac{y+2}{2})+21=0$ ， $\therefore 2x+5y+3=0$ ．

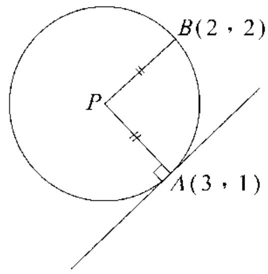
(3)圓心 $O(4，-3)$，$\because \angle PAO=\angle PBO=90°$，$\therefore P$，$A$，$O$，$B$ 四點共圓且 $\overline{OP}$ 爲直徑

$\Rightarrow$ $\triangle PAB$ 的外接圓圓心爲 $\overline{OP}$ 的中點$(5，-\frac{1}{2})$，$r^2=(\frac{1}{2}\overline{OP})^2=\frac{29}{4}$

$\Rightarrow$ 所求爲$(x-5)^2+(y+\frac{1}{2})^2=\frac{29}{4}$，即 $x^2+y^2-10x+y+18=0$ ．

21.一圓 C 切直線 $2x-y=5$ 於點$(3，1)$且通過點$(2，2)$，則：

(1)圓 C 的圓心坐標爲____________ ． (2)圓的方程式爲____________ ．



解答 (1)$(\frac{7}{3}，\frac{4}{3})$;(2)$(x-\frac{7}{3})^2+(y-\frac{4}{3})^2=\frac{5}{9}$

解析 圓 C 切直線 $2x-y=5$ 於點 $A(3，1)$，

故圓心 P 在通過 $A(3，1)$且垂直的直線 $x+2y=5$ 上，

設 $P(-2t+5，t)$，又圓 C 過點 $B(2，2)$，故 $\overline{PA}=\overline{PB}$，

$\Rightarrow(-2t+2)^2+(t-1)^2=(-2t+3)^2+(t-2)^2 \quad \Rightarrow t=\frac{4}{3}$，

$\therefore$ 圓心 $P(\frac{7}{3}，\frac{4}{3})$，半徑 $r=\overline{PA}=\sqrt{\frac{5}{9}}$，圓 C 的方程式爲$(x-\frac{7}{3})^2+(y-\frac{4}{3})^2=\frac{5}{9}$ ．

22.圓 $2x^2+2y^2-8x-5y+k=0$ 與直線 $x-y=0$ 相切時，$k=$____________ ．

解答 $\frac{169}{16}$

解析 $2x^2+2y^2-8x-5y+k=0$ 與 $x-y=0$ 相切時，代入 $y=x$，則 $2x^2+2x^2-8x-5x+k=0$，

即 $4x^2-13x+k=0$ 有重根，判別式 $D=(-13)^2-4\times4\times k=0 \quad \Rightarrow \quad k=\frac{169}{16}$ ．

23.求與直線 $x+2y-3=0$ 垂直，且與圓 $x^2+y^2-2x+2y+1=0$ 相切的直線方程式爲____________ ．（有兩解）

解答 $2x-y-3+\sqrt{5}=0$ 或 $2x-y-3-\sqrt{5}=0$

解析 $\because$與直線 $x+2y-3=0$ 垂直，$\therefore$可設切線 $2x-y+k=0$

$\Rightarrow y=2x+k$ 代入圓 C，$\therefore x^2+(2x+k)^2-2x+2(2x+k)+1=0$

$\Rightarrow 5x^2+(4k+2)x+(k^2+2k+1)=0$，

$\because$相切 $\Rightarrow$ 判別式 $D=(4k+2)^2-4\times5\times(k^2+2k+1)=0$，

$\therefore 4k^2+24k+16=0$，$\therefore k^2+6k+4=0 \Rightarrow k=-3\pm\sqrt{5}$，

即切線爲 $2x-y-3+\sqrt{5}=0$ 或 $2x-y-3-\sqrt{5}=0$ ．

24.若直線 $y=2x+k$ 與圓 C：$x^2+y^2+4x+2y-20=0$ 交於兩點，則 k 值之範圍爲____________ ．

解答 $3-5\sqrt{5}<k<3+5\sqrt{5}$

解析 $\begin{cases} C：x^2+y^2+4x+2y-20=0\cdots\cdots① \\ L：y=2x+k\cdots\cdots② \end{cases}$，

②代入① $\Rightarrow$ $5x^2+4(k+2)x+(k^2+2k-20)=0$，

D：$16(k+2)^2-4\times5\times(k^2+2k-20)>0$（$\because$交於兩點）

$\Rightarrow k^2-6k-116<0 \Rightarrow 3-5\sqrt{5}<k<3+5\sqrt{5}$ ．

25.圓外一點 $P(-3，6)$對圓 $2x^2+2y^2+6x-2y-5=0$ 所作的切線段長爲＿＿＿＿＿＿＿＿．

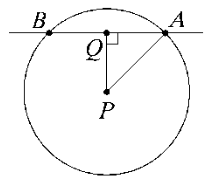
解答 $\dfrac{\sqrt{110}}{2}$

解析 圓 $C：x^2+y^2+3x-y-\dfrac{5}{2}=0$，切線段長$=\sqrt{(-3)^2+6^2+3\times(-3)-6-\dfrac{5}{2}}=\sqrt{\dfrac{55}{2}}=\dfrac{\sqrt{110}}{2}$ ．

26.直線 $x-y=3$ 被圓 $x^2+y^2-x+y-2=0$ 所截得的弦長= ＿＿＿＿＿＿＿＿．

解答 $\sqrt{2}$

解析 圓 $C：(x-\dfrac{1}{2})^2+(y+\dfrac{1}{2})^2=\dfrac{5}{2}$，圓心 $P(\dfrac{1}{2}，-\dfrac{1}{2})$，半徑 $r=\sqrt{\dfrac{5}{2}}$，



弦長$=\overline{AB}=2\overline{AQ}=2\sqrt{\overline{PA}^2-\overline{PQ}^2}=2\sqrt{\dfrac{5}{2}-2}=\sqrt{2}$ ．

（其中 $\overline{PQ}=d(P，L)=\dfrac{|\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-3|}{\sqrt{2}}=\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$ ）

27.一圓過圓 $x^2+y^2+2x-4y+1=0$ 與直線 $2x-y+4=0$ 的交點，且半徑爲 3，此圓有兩個，其中圓心在第一象限的圓之方程式爲＿＿＿＿＿＿＿＿．

解答 $(x-1)^2+(y-1)^2=9$

解析 過圓 $x^2+y^2+2x-4y+1=0$ 與直線 $2x-y+4=0$ 交點的圓系方程式爲

$(x^2+y^2+2x-4y+1)+k(2x-y+4)=0$，

整理 $\Rightarrow$ $x^2+y^2+2(k+1)x-(k+4)y+4k+1=0$……①，

配方 $\Rightarrow$ $(x+k+1)^2+(y-\dfrac{k+4}{2})^2=(k+1)^2+\dfrac{1}{4}(k+4)^2-(4k+1)=\dfrac{1}{4}(5k^2+16)$，

半徑 3 $\Rightarrow$ $\dfrac{1}{4}(5k^2+16)=9$ $\Rightarrow$ $k=\pm 2$

圓心在第一象限者取 $k=-2$ 爲 $x^2+y^2-2x-2y-7=0$ ．

28.二圓 $C_1：x^2+y^2+3x+3y-8=0$，$C_2：x^2+y^2+7x+6y-10=0$ 相交於二點 A，B，則以 $\overline{AB}$ 爲直徑的圓方程式爲＿＿＿＿＿＿＿＿．

解答 $x^2+y^2-x-6=0$

解析 $C_1：x^2+y^2+3x+3y-8=0$，$C_2：x^2+y^2+7x+6y-10=0$，

C_1，C_2 的根軸 $L：(x^2+y^2+3x+3y-8)-(x^2+y^2+7x+6y-10)=0$ $\Rightarrow$ $4x+3y-2=0$，

設通過 A，B 的圓系方程式爲$(x^2+y^2+3x+3y-8)+k(4x+3y-2)=0$

$\Rightarrow$ $x^2+y^2+(4k+3)x+(3k+3)y-8-2k=0$

$\Rightarrow$ $(x+\dfrac{4k+3}{2})^2+(y+\dfrac{3k+3}{2})^2=8+2k+\dfrac{(4k+3)^2}{4}+\dfrac{(3k+3)^2}{4}=\dfrac{25}{4}(k^2+2k+2)$，

以 $\overline{AB}$ 爲直徑的圓，即圓心 $(-\dfrac{4k+3}{2},-\dfrac{3k+3}{2})$ 在根軸 $4x+3y-2=0$ 上 $\Rightarrow k=-1$ ．

即所求圓的方程式爲 $x^2+y^2-x-6=0$，

29.二圓 $x^2+y^2+2x=0$ 及 $x^2+y^2-6x-8y+21=0$ 二外公切線夾角 θ，則 $\sin\theta$ 的值爲＿＿＿＿＿＿＿＿．

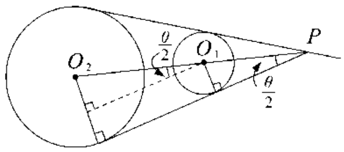
解答 $\dfrac{\sqrt{31}}{16}$

解析 $x^2+y^2+2x=0$ $\Rightarrow$ $(x+1)^2+y^2=1$，圓心 $O_1(-1，0)$，半徑 $r_1=1$，

$x^2+y^2-6x-8y+21=0 \quad \Rightarrow \quad (x-3)^2+(y-4)^2=4$，圓心 $O_2(3，4)$，半徑 $r_2=2$，

圓心距離 $\overline{O_1O_2}=\sqrt{4^2+4^2}=4\sqrt{2}$ ，外公切線長$=\sqrt{\overline{O_1O_2}^2-(r_2-r_1)^2}=\sqrt{31}$ ，

$\sin\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{2-1}{4\sqrt{2}}=\dfrac{1}{4\sqrt{2}}$，$\cos\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{\sqrt{31}}{4\sqrt{2}}$ ，故 $\sin\theta=2\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}=2\cdot\dfrac{1}{4\sqrt{2}}\cdot\dfrac{\sqrt{31}}{4\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{31}}{16}$.



30.試求通過圓 $x^2+y^2+2x-4y+1=0$ 與直線 $2x-y+4=0$ 的交點,且切於 x 軸的圓方程式為________.

解答 $x^2+y^2+2x-4y+1=0$ 或 $x^2+y^2+6x-6y+9=0$

解析 設過圓與直線的圓為 $x^2+y^2+2x-4y+1+k(2x-y+4)=0$，

即$(x+1+k)^2+(y-2-\dfrac{k}{2})^2=\dfrac{5}{4}k^2+4$，圓心 $O(-1-k，2+\dfrac{k}{2})$，

$d(O，x\text{軸})=|2+\dfrac{k}{2}| \quad \Rightarrow \quad (2+\dfrac{k}{2})^2=\dfrac{5}{4}k^2+4 \quad \Rightarrow \quad k=0$ 或 2，

$\therefore \quad x^2+y^2+2x-4y+1=0$ 或 $x^2+y^2+6x-6y+9=0$.

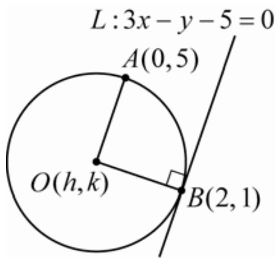
31.若 $x，y\in\mathbb{R}$ ，$(x-4)^2+(y-3)^2=4$，則$(x-1)^2+(y+1)^2$之最大值為____________ .

解答 49

解析 設 $P(x，y)\in$ 圓 $C：(x-4)^2+(y-3)^2=4$，Q 點坐標為$(1，-1)$，則$(x-1)^2+(y+1)^2=\overline{PQ}^2$，

故最大值$=(\overline{AQ}+r)^2=(5+2)^2=49$（其中 A 為圓心$(4，3)$，r 為半徑 2）.

32.若有一圓通過點 $A(0，5)$，並且與直線 $L：3x-y-5=0$ 相切於點 $B(2，1)$，若此圓的方程式為$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$，求數對$(h，k，r^2)=$____________ .



解答 $(-1，2，10)$

解析 設圓心 $O(h，k)$，

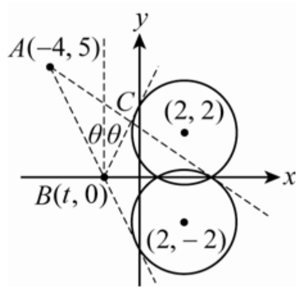
$\because \overline{OB}\perp L$ ，$\therefore m_{\overline{OB}}\times m_L=-1 \Rightarrow \dfrac{k-1}{h-2}\times 3=-1$ ，$h+3k=5$……①，

又 $\overline{OA}^2=\overline{OB}^2=r^2$ ，$h^2+(k-5)^2=(h-2)^2+(k-1)^2 \Rightarrow h-2k=-5$……②，

由①②得 $h=-1$，$k=2$，$\therefore r^2=\overline{OA}^2=(-1)^2+(2-5)^2=10$ ，

即$(h，k，r^2)=(-1，2，10)$.

33.一光線通過$(-4,5)$,經 x 軸反射後與圓:$(x-2)^2+(y-2)^2=5$ 相切,求原光線之方程式為__________.



解答 $2x+y+3=0$

解析 作圓：$(x-2)^2+(y-2)^2=5$ 關於 x 軸的對稱圓：$(x-2)^2+(y+2)^2=5$，

由反射原理可知原光線必與之相切,

設原光線斜率 $m \Rightarrow y-5=m(x+4)$,$y=m(x+4)+5$ 代入$(x-2)^2+(y+2)^2=5$，

得$(x-2)^2+[m(x+4)+7]^2=5$

$\Rightarrow (m^2+1)x^2+(8m^2+14m-4)x+(16m^2+56m+48)=0$，

$\because$相切，$\therefore$判別式 $D=(8m^2+14m-4)^2-4(m^2+1)(16m^2+56m+48)=0$

$\Rightarrow 31m^2+84m+44=0 \Rightarrow (31m+22)(m+2)=0$，$\therefore m=-\dfrac{22}{31}$ 或 -2，

由圖判斷 m 取 $-2 \Rightarrow$ 原光線方程式為 $y-5=-2(x+4)$，即 $2x+y+3=0$.

34.求與 $x+2y=5$ 垂直且與 $x^2+y^2-8x+10y+5=0$ 相切的直線方程式____________．（有兩解）

解答 $2x-y-13\pm 6\sqrt{5}=0$

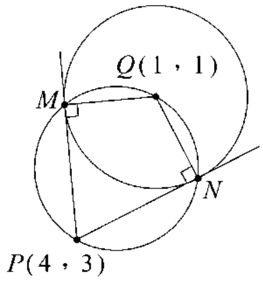
解析 與 $x+2y=5$ 垂直，則可設切線 $2x-y+k=0$，

$\therefore y=2x+k$ 代入 $x^2+y^2-8x+10y+5=0$

$\Rightarrow x^2+(2x+k)^2-8x+10(2x+k)+5=0 \Rightarrow 5x^2+(4k+12)x+(k^2+10k+5)=0$，

$\because$相切，$\therefore$判別式 $D=(4k+12)^2-4\times 5\times(k^2+10k+5)=0$

$\Rightarrow k^2+26k-11=0$，$\therefore k=-13\pm 6\sqrt{5}$，即切線爲 $2x-y-13\pm 6\sqrt{5}=0$ ．



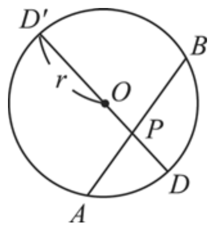
35.圓 C：$x^2+y^2-2x-2y-2=0$，過其外部一點 $P(4，3)$作兩切線，自 P 作圓 C 之一條割線，交圓 C 於 A，B 兩點，則 $\overline{PA}\times\overline{PB}=$____________．

解答 9

解析 由外冪性質知：

$\overline{PA}\times\overline{PB}=\overline{PM}^2=\overline{PQ}^2-\overline{QM}^2=13-4=9$ ．

36.已知圓 $C: x^2+y^2-4x+2y-11=0$，過 $P(1,2)$作圓的割線交圓於 A,B 兩點，則 $\overline{PA}\cdot\overline{PB}=$__________．



解答 6

解析 $(x-2)^2+(y+1)^2=4^2$，圓心 $O(2,-1)\Rightarrow \overline{OP}=\sqrt{10}$，

$\overline{PA}\cdot\overline{PB}=\overline{PD}\cdot\overline{PD'}=(r+\overline{OP})\cdot(r-\overline{OP})=r^2-\overline{OP}^2=16-10=6$ ．

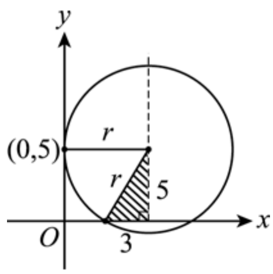
37.平面坐標上有一圓方程式爲$(x-3)^2+(y-4)^2=4$，圓上有一動點 $P(x，y)$，試問滿足 $\sqrt{x^2+y^2}$ 爲整數的動點 P 有____________個．

解答 8

解析 $\sqrt{x^2+y^2}$ 爲 P 點到原點的距離，$Q(3,4)$爲圓心，

$\therefore \overline{OQ}-r\le\overline{PO}\le\overline{OQ}+r \quad\Rightarrow\quad 5-2\le\overline{PO}\le 5+2 \quad\Rightarrow\quad 3\le\overline{PO}\le 7$，

$\therefore \overline{PO}$ 可能爲 3，4，5，6，7，故 P 點有 $1+2\times 3+1=8$ 個．



38.圓心在第一象限內，且與 y 軸切於$(0,5)$，並與 x 軸截出一弦長 6 的圓方程式爲________．

解答 $(x-\sqrt{34})^2+(y-5)^2=34$

解析 如圖，圓與 y 軸相切於(0，5)$\Rightarrow r=\sqrt{5^2+3^2}=\sqrt{34}$，$\therefore$ 圓心爲($\sqrt{34}$，5)，

則圓方程式爲$(x-\sqrt{34})^2+(y-5)^2=34$ ．

39.設 $y=-3+\sqrt{4-(x-2)^2}$，則 x^2+y^2的 (1)最大值爲____________． (2)最小值爲____________．

解答 (1)25;(2)$17-4\sqrt{13}$

解析 $y=-3+\sqrt{4-(x-2)^2}$ ……①，移項平方，$(y+3)^2=4-(x-2)^2$

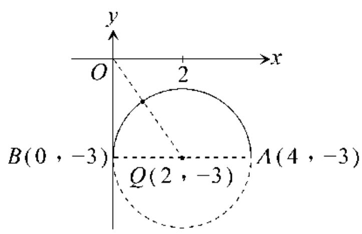
$\Rightarrow\quad (x-2)^2+(y+3)^2=4$ 爲圓心 $Q(2，-3)$，半徑 2 的圓，

而①式的 $y\ge -3$，圖形爲此圓的上方半圓，如圖，實線部分，

x^2+y^2 表示圖形上的點$(x，y)$與原點 O 的距離平方．

(1) x^2+y^2 的最大值爲$\overline{OA}^2=4^2+(-3)^2=25$ ．

(2) x^2+y^2 的最小值爲$(\overline{OQ}-2)^2=(\sqrt{13}-2)^2=17-4\sqrt{13}$ ．



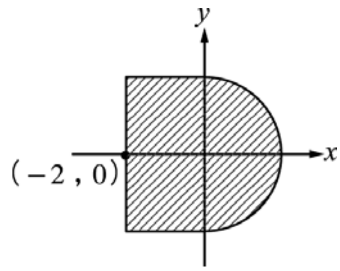
40.滿足不等式 $-2 \le x \le \sqrt{4-y^2}$ 之點 $P(x, y)$所形成之區域的面積爲____________.

解答　$2\pi + 8$

解析　$-2 \le x \le \sqrt{4-y^2} \Rightarrow \begin{cases} x \ge -2 \\ x \le \sqrt{4-y^2} \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ x^2 \le 4-y^2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} -2 \le x < 0 \\ 4-y^2 \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ x^2+y^2 \le 4 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} -2 \le x < 0 \\ -2 \le y \le 2 \end{cases}$,

$\therefore$ 面積$= \frac{1}{2} \times \pi \times 2^2 + 4 \times 2 = 2\pi + 8$.



41.若 C：$\begin{cases} x = 3(\sin\theta + \cos\theta) \\ y = 3(\cos\theta - \sin\theta) \end{cases}$，且 $0 \le \theta \le 2\pi$，則 C 所表示圖形的面積=____________.

解答　18π

解析　$\begin{cases} x = 3(\sin\theta + \cos\theta) \\ y = 3(\cos\theta - \sin\theta) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\theta + \sin\theta = \frac{x}{3} \\ \cos\theta - \sin\theta = \frac{y}{3} \end{cases} \Rightarrow$ 兩邊平方$\begin{cases} 1+\sin 2\theta = \frac{x^2}{9} \cdots\cdots ① \\ 1-\sin 2\theta = \frac{y^2}{9} \cdots\cdots ② \end{cases}$

$\Rightarrow$ ① + ② $\Rightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{9} = 2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 18$，表一圓，故圖形面積$=18\pi$.

42.設 A 點在圓 $x^2+y^2=4$ 上移動，B 點在圓 $x^2+y^2=16$ 上移動，則所有 $\overline{AB}$ 中點所成圖形的面積=______.

解答　8π

解析　設 $A(2\cos\alpha, 2\sin\alpha)$，$B(4\cos\beta, 4\sin\beta)$，$\overline{AB}$ 中點 $P(x, y)$，

則 $x = \frac{1}{2}(2\cos\alpha + 4\cos\beta) = \cos\alpha + 2\cos\beta$，$y = \frac{1}{2}(2\sin\alpha + 4\sin\beta) = \sin\alpha + 2\sin\beta$

$\Rightarrow x^2+y^2 = (\cos\alpha + 2\cos\beta)^2 + (\sin\alpha + 2\sin\beta)^2 = 5 + 4\cos(\alpha - \beta)$,

$\because -1 \le \cos(\alpha-\beta) \le 1$，$\therefore 1 \le x^2+y^2 \le 9$，圖形面積$= 9\pi - \pi = 8\pi$.