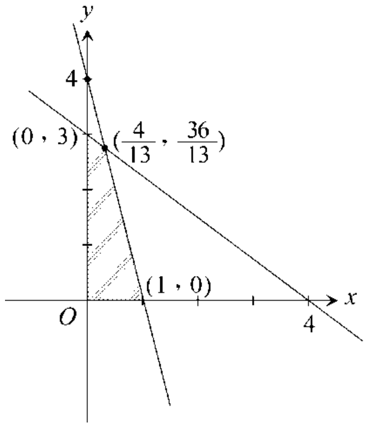
<table>
<tr><td colspan="6">高雄市明誠中學 高二數學複習測驗　　日期：100.11.15</td></tr>
<tr><td rowspan="2">範圍</td><td rowspan="2">2-線性規劃(A)</td><td>班級</td><td>普二　　班</td><td rowspan="2">姓名</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>座號</td><td></td></tr>
</table>

一、填充題（ 每題 10 分 ）

1.在 $x\ge 0$，$y\ge 0$，$4x+y\le 4$，$3x+4y\le 12$ 的條件下，$2x+y$ 的最大值爲____________ .

解答 $\dfrac{44}{13}$



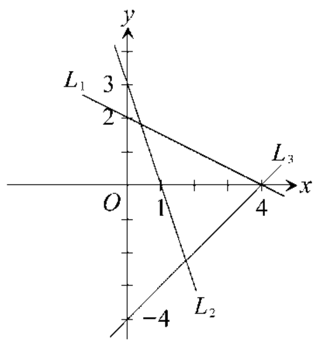
解析 不等式組 $\begin{cases}x\ge 0\\ y\ge 0\\ 4x+y\le 4\\ 3x+4y\le 12\end{cases}$ 的圖形如下：

其頂點坐標爲(0，0)，(1，0)，$(\dfrac{4}{13}，\dfrac{36}{13})$，(0，3)，

代入 $2x+y$ 得值依次爲 0，2，$\dfrac{44}{13}$，3，最大值爲 $\dfrac{44}{13}$.

2. 若點 $P(k，2k-3)$在三直線 L_1：$x+2y-4=0$，L_2：$3x+y-3=0$，L_3：$x-y-4=0$ 所圍成三角形的內部，則 k 之範圍爲_________ .

解答 $\dfrac{6}{5}<k<2$



解析 三直線 L_1：$x+2y-4=0$，L_2：$3x+y-3=0$，

L_3：$x-y-4=0$ 所圍成的三角形如圖，

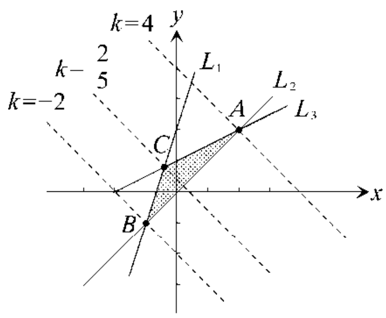
三角形內部（不含邊界）滿足不等式組 $\begin{cases}x+2y-4<0\\ 3x+y-3>0\\ x-y-4<0\end{cases}$，

點 $P(k，2k-3)$在三角形內部，代入滿足

$$\begin{cases}k+2(2k-3)-4<0\\ 3k+(2k-3)-3>0\\ k-(2k-3)-4<0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}5k-10<0\\ 5k-6>0\\ -k-1<0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k<2\\ k>\dfrac{6}{5}\\ k>1\end{cases}\Rightarrow\dfrac{6}{5}<k<2 .$$

3. 在 $3x+2\ge y\ge x\ge 2y-2$ 的條件下，(1) $x+y$ 的最大值爲______ .(2) y 的最小值爲_______ .

解答 (1)4;(2)-1



解析 原式 $\Rightarrow\begin{cases}3x+2\ge y\\ y\ge x\\ x\ge 2y-2\end{cases}$

L_1：$3x+2=y$，L_2：$y=x$，L_3：$x=2y-2$，

如圖，L_1，L_2，L_3 三直線圍成一三角形，

三頂點 $A(2，2)$，$B(-1，-1)$，$C(\dfrac{-2}{5}，\dfrac{4}{5})$.

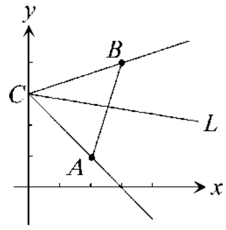
(1)A，B，C 代入 $x+y$ 中得值 4，-2，$\dfrac{2}{5}$，此時 $-2\le x+y\le 4$，

∴　當 $x=2$，$y=2$ 時，$x+y$ 有最大值 4 .

(2)A，B，C 代入 y 中得值 2，－1，$\frac{4}{5}$，此時 $-1\le y\le 2$，

∴　當 $x=-1$，$y=-1$ 時，y 有最小值 -1．

4. $A(2，1)$，$B(3，4)$，若線段 $\overline{AB}$ 與直線 $y=mx+3$ 相交（有公共點），則實數 m 值的範圍爲____________．



解答　$-1\le m\le\frac{1}{3}$

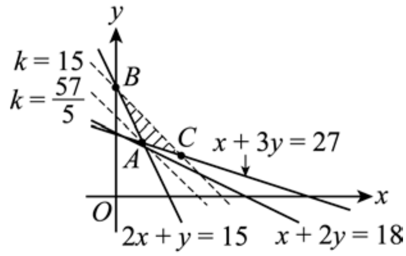
解析　L：$y=mx+3$ 表示通過(0，3)，斜率 m 之直線，

右圖中，$\overleftrightarrow{CB}$，$\overleftrightarrow{CA}$ 之斜率分別是 $\frac{1}{3}$，－1，∴　$-1\le m\le\frac{1}{3}$．

5. 滿足不等式組 $2x+y\ge 15$，$x+2y\ge 18$，$x+3y\ge 27$，$x\ge 0$ 與 $y\ge 0$ 之任一數對$(x，y)$，當 x 與 y 均爲整數時，$x+y$ 的最小值是____________．

解答　12

解析



設 L_k：$x+y=k$，$B(0，15)$，$C(9，6)$，

二直線 $2x+y=15$ 與 $x+3y=27$ 交點 $A(\frac{18}{5}，\frac{39}{5})$，

如圖：列出△ABC 內之格子點 $P(x，y)$滿足

$2x+y\ge 15$，$x+2y\ge 18$，$x+3y\ge 27$，

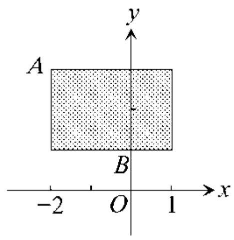
$(x，y)$	(3，9)	(4，8)	(5，8)	(6，7)	…
$x+y$	12	12	13	13	…

∴　$x+y$ 之最小值 12，其中$(x，y)=(3，9)$或$(4，8)$．

6. 已知 $-2\le x\le 1$ 及 $1\le y\le 3$，若 x^2+y^2 之最大值 a，最小值 b，則數對$(a,b)=$____________．

解答　(13，1)

解析　$P(x，y)$滿足 $-2\le x\le 1$ 及 $1\le y\le 3$，$\overline{OP}^2=x^2+y^2$，



由圖知 $P=A$ 時，$P(-2，3)$ 使 $\overline{OP}^2$ 有最大值 13；

$P=B$ 時，$P(0，1)$ 使 $\overline{OP}^2$ 有最小值 1，

∴　$(a，b)=(13，1)$．

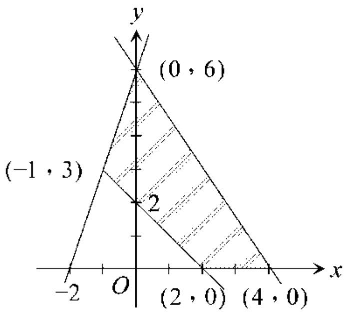
7. 設 $x，y\in\mathbb{R}$ 且滿足下列不等式：$x+y\ge 2$，$3x+2y\le 12$，$3x-y+6\ge 0$，$y\ge 0$，則

(1) $2x+y+1$ 的最大值爲____________，最小值爲____________．

(2)若 $m\le\frac{y+2}{x+3}\le M$，則$(M，m)=$____________．

解答　(1) 9，2;(2)$(\frac{8}{3}，\frac{2}{7})$

解析　$\begin{cases}x+y\ge 2\\3x+2y\le 12\\3x-y+6\ge 0\\y\ge 0\end{cases}$，如圖爲四邊形區域，其頂點(2，0)，(4，0)，(0，6)，(－1，3)．



(1)設 $2x+y+1=k$ 表斜率 -2 的直線系，當直線通過區域之頂點時，k 有極值，

(x, y)	$(2, 0)$	$(4, 0)$	$(0, 6)$	$(-1, 3)$
k	5	9	7	2

由表知，$2x+y+1$ 之最大值爲 9，最小值爲 2．

(2)設 $\dfrac{y+2}{x+3}=t$，則 $y+2=t(x+3)$表通過定點$(-3, -2)$斜率 t 之直線系，

當此直線系繞$(-3, -2)$旋轉而掃過區域時，通過頂點，斜率 t 有極值，

(x, y)	$(2, 0)$	$(4, 0)$	$(0, 6)$	$(-1, 3)$
t	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{8}{3}$	$\frac{5}{2}$

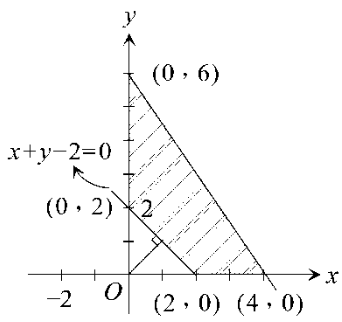
由表知，t 之最大值 $M=\dfrac{8}{3}$，最小值 $m=\dfrac{2}{7}$．

8. 在不等式組$\begin{cases} x\ge 0 \\ y\ge 0 \\ 3x+2y-12\le 0 \\ x+y-2\ge 0 \end{cases}$的圖形內，求下列各式的極值．

(1) x^2+y^2 的最小值爲＿＿＿＿＿＿＿．　(2) $x^2+y^2+2x+4y+5$ 的最大值爲＿＿＿＿＿＿＿．

解答　(1) 2;(2) 65

解析　$\begin{cases} x\ge 0,\ y\ge 0 \\ 3x+2y-12\le 0 \\ x+y-2\ge 0 \end{cases}$的圖形如下：



頂點$(2, 0)$，$(4, 0)$，$(0, 6)$，$(0, 2)$．

(1)x^2+y^2 表示點(x, y)與原點$(0, 0)$的距離平方，

此距離最小值爲$(0, 0)$到直線 $x+y-2=0$ 的距離，

故 x^2+y^2 之最小值爲$\left(\dfrac{-2}{\sqrt{2}}\right)^2=2$．

(2)$x^2+y^2+2x+4y+5=(x^2+2x+1)+(y^2+4y+4)=(x+1)^2+(y+2)^2=k$，

表示點(x, y)與點$(-1, -2)$距離平方，

$(x, y)=(4, 0)$時，$k=5^2+2^2=29$；

$(x, y)=(0, 6)$時，$k=1^2+8^2=65$，故 k 的最大值爲 65．

9.若 $A(2, -3)$與 $B(k, 5)$在直線 L：$3x+4y-7=0$ 的同側，則 k 值的範圍爲＿＿＿＿＿＿＿．

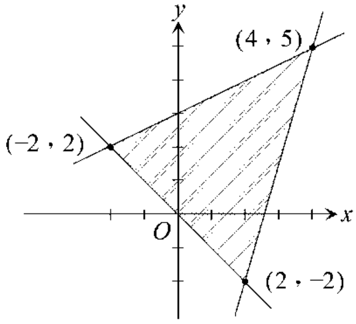
解答　$k<-\dfrac{13}{3}$

解析　設 $f(x, y)=3x+4y-7$，$A(2, -3)$與 $B(k, 5)$在直線 $3x+4y-7=0$ 的同側，

則 $f(2, -3)$與 $f(k, 5)$同號，即 $f(2, -3)\cdot f(k, 5)>0$

$\Rightarrow\ (6-12-7)(3k+20-7)>0 \ \Rightarrow\ 13(3k+13)<0 \ \Rightarrow\ k<-\dfrac{13}{3}$.

10.不等式組$\begin{cases} x-2y\ge -6 \\ 7x-2y\le 18 \\ x+y\ge 0 \end{cases}$的圖形面積爲__________ .



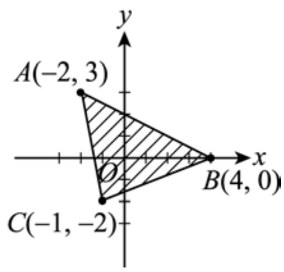
解答 18

解析 不等式組$\begin{cases} x-2y\ge -6 \\ 7x-2y\le 18 \\ x+y\ge 0 \end{cases}$的圖形如下之三角形區域，

其頂點坐標爲(2，−2)，(4，5)，(−2，2)，

故面積爲$\dfrac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 2 & 4 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 2 & -2 \end{vmatrix}\right|=\dfrac{1}{2}|10+8+4+8+10-4|=18$.

11.設 $A(-2，3)$，$B(4，0)$，$C(-1，-2)$，試以 x，y 的不等式組表△ABC 區域，此不等式組爲__________ .



解答 $x+2y-4\le 0$，$2x-5y-8\le 0$，$5x+y+7\ge 0$

解析 ∵ $A(-2，3)$，$B(4，0)$，$C(-1，-2)$，

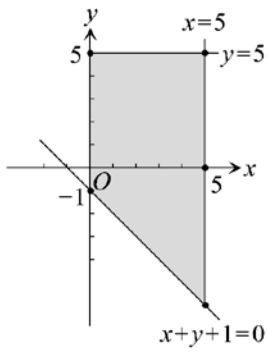
∴ 直線 AB：$x+2y-4=0$，△ABC 區域於其下方

直線 BC：$2x-5y-8=0$，△ABC 區域於其上方

直線 AC：$5x+y+7=0$，△ABC 區域於其上方，

∴ 所求不等式組 $x+2y-4\le 0$, $2x-5y-8\le 0$, $5x+y+7\ge 0$.

12.滿足$\begin{cases} 0\le x\le 5 \\ y\le 5 \\ x+y+1\ge 0 \end{cases}$的整數數對$(x，y)$有__________組 .



解答 57

解析 作圖$\begin{cases} 0\le x\le 5 \\ y\le 5 \\ x+y+1\ge 0 \end{cases}$，如右，

在陰影部分中，$(x，y)$爲整數數對的解：

(1) $x=0$ 時，$y=-1，0，\dots，5$ 共 7 組 .

(2) $x=1$ 時，$y=-2，-1，0，\dots，5$ 共 8 組 .

(3) $x=2$ 時，$y=-3，-2，-1，\dots，5$ 共 9 組 .

(4) $x=3$ 時，$y=-4，-3，\dots，5$ 共 10 組 .

(5) $x=4$ 時，$y=-5，-4，\dots，5$ 共 11 組 .

(6) $x=5$ 時，$y=-6，-5，\dots，5$ 共 12 組 .

此不等式組內的整數數對有 $7+8+9+10+11+12=57$ 組 .

13.設 $A(2,0)$,$B(0,3)$,若點 $P(k,3)$與點 $Q(4,k)$在直線 AB 的異側,則 k 値之範圍爲________ .

解答 $-3<k<0$

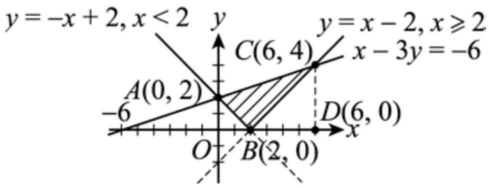
解析 直線 AB：$y=\dfrac{3}{-2}(x-2) \ \Rightarrow\ 3x+2y-6=0$，

設 $f(x, y)=3x+2y-6$，因 $P(k, 3)$，$Q(4, k)$在直線 AB 的異側，
代入 $f(x, y)$之値異號，即 $f(k, 3)\cdot f(4, k)<0 \quad \Rightarrow \quad (3k+6-6)(12+2k-6)<0$，
即 $k(k+3)<0$，故得 $-3<k<0$．

14.不等式組$\begin{cases} y\ge |x-2| \\ x-3y\ge -6 \end{cases}$所圍成區域之面積爲____________．

解答　8

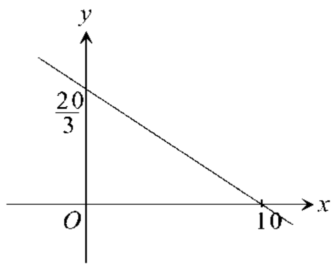
解析　$\because \quad y\ge |x-2|$，
當 $x\ge 2$ 時，$y\ge x-2$，
當 $x<2$ 時，$y\ge -x+2$，其圖形爲角及內部，
又 $x-3y\ge -6$ 表線 $x-3y+6=0$ 及其下方，
$\therefore$　共同部分爲如圖斜線部分之三角形區域，
$\because$　三頂點分別爲 $A(0, 2)$，$B(2, 0)$，$C(6, 4)$，故所求區域面積爲
梯形 $OACD$ 面積 $-\triangle OAB$ 面積 $-\triangle BCD$ 面積$=\frac{1}{2}(2+4)\times 6-\frac{1}{2}\times 2\times 2-\frac{1}{2}\times 4\times 4$
$=18-2-8=8$．



15.設 x，y 均爲正整數，則　(1)滿足 $6x+9y\le 60$ 的(x, y)共有____________組．
(2)其中 x^2+y^2 的最大值爲____________．

解答　(1)27;(2)65

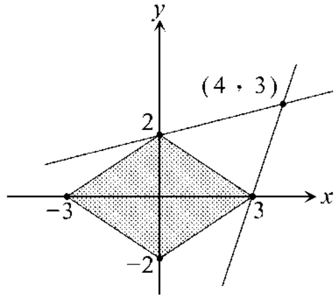
解析　$6x+9y\le 60$ 的正整數解，即 $2x+3y\le 20$ 的正整數解，作 $2x+3y=20$ 圖，如下．
①當 $y=1$ 時，$1\le x\le 8.5$，共有 8 組．
②當 $y=2$ 時，$1\le x\le 7$，共有 7 組．
③當 $y=3$ 時，$1\le x\le 5.5$，共有 5 組．
④當 $y=4$ 時，$1\le x\le 4$，共有 4 組．
⑤當 $y=5$ 時，$1\le x\le 2.5$，共有 2 組．
⑥當 $y=6$ 時，$x=1$，共有 1 組．
故 $6x+9y\le 60$ 正整數解，共 $8+7+5+4+2+1=27$(組)，
其中使 x^2+y^2 有最大值的點爲$(x, y)=(8, 1)$，此時 $x^2+y^2=65$．



16.在 $2|x|+3|y|\le 6$ 的條件下，
(1) $3x-2y$ 的最大值=________．　(2)$\frac{y-3}{x-4}$的最大值=__________．

解答　(1)9;(2)3

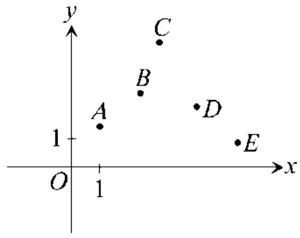
解析　在 $2|x|+3|y|\le 6$ 的條件下，如右圖．
(1)$3x-2y$ 的最大值$=3\times 3-2\times 0=9$．
(2)$\frac{y-3}{x-4}$的最大值，表示點(x, y)與點$(4, 3)$的斜率，



知$(x, y)=(3, 0)$時，$\dfrac{y-3}{x-4}=\dfrac{0-3}{3-4}=3$ 最大．

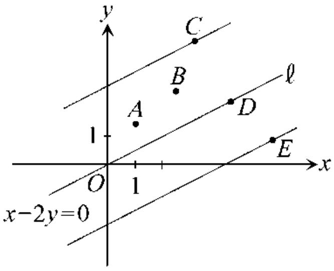
17.如圖，A，B，C，D，E 爲坐標平面上五點，其坐標爲(x, y)，令函數 $f(x, y)=x-2y$，則可知(1)哪一點的坐標可使 $f(x, y)$的值最大？＿＿＿＿＿＿．

(2)哪一點的坐標可使 $f(x, y)$的值最小？＿＿＿＿＿＿．



解答　(1)E;(2)C

解析　直線 $x-2y=0$，如圖中的 ℓ，由圖中各點的位置可知，過點 E 而平行 ℓ 的直線會使 $f(x, y)=x-2y$ 的值最大，過點 C 而平行 ℓ 的直線會使 $f(x, y)=x-2y$ 的值最小．

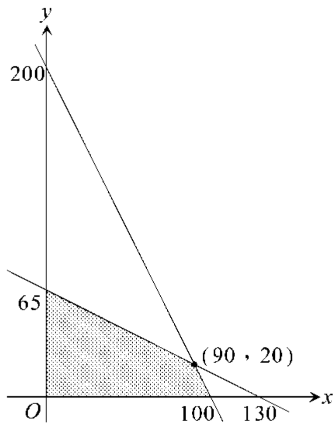


18.某家具公司製作木質書桌與椅子，需要木工與漆工兩項手續，若木工平均 8 小時做一張書桌，4 小時做一把椅子；漆工平均 1 小時漆一張書桌，2 小時漆一把椅子，該公司每星期木工最多有 800 個工作時，漆工有 130 個工作時，又已知一張書桌和一把椅子的利潤分別是 2000 元與 1500 元．

(1)每星期生產書桌＿＿＿＿＿＿張，椅子＿＿＿＿＿＿把，該公司能獲得最大利潤．

(2)該公司的最大利潤爲＿＿＿＿＿＿萬元．

解答　(1) 90，20;(2) 21



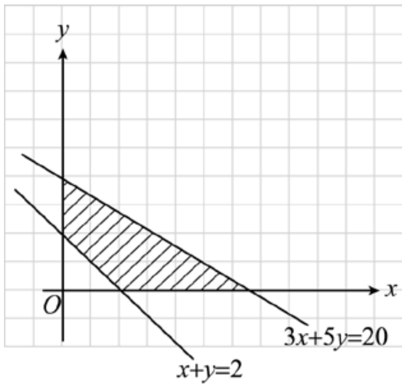
解析　設書桌 x 張，椅子 y 把，$\begin{cases} 8x+4y\le 800 \\ x+2y\le 130 \\ x\ge 0,\ y\ge 0 \end{cases}$，

欲求利潤 $2000x+1500y$，x，$y\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ 最大，

	(100，0)	(90，20)	(0，65)
利潤	200000	210000	97500

在$(x, y)=(90, 20)$時，利潤最大爲 210000 = 21 萬（元）．

19.試計算 $\begin{cases} 3x+5y\le 20 \\ x+y\ge 2 \\ x\ge 0 \\ y\ge 0 \end{cases}$ 區域內的格子點數＿＿＿＿＿＿．



解答　17

解析

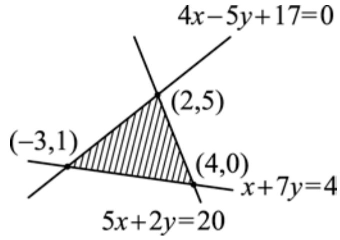
x	0	1	2	3	4	5	6
y	2 ~ 4	1 ~ 3	0 ~ 2	0 ~ 2	0 ~ 1	0 ~ 1	0

∴ 共有 17 個格子點．

20.若(x，y)為不等式組$\begin{cases} x+7y-4\ge 0 \\ 4x-5y+17\ge 0 \\ 5x+2y-20\le 0 \end{cases}$所表示圖形上的任一點，且 $k=ax-y$ 在(2，5)有最小值時，則實數 a 的範圍為＿＿＿＿＿＿＿.

解答　$-\frac{5}{2}\le a\le \frac{4}{5}$

解析



三頂點 $(-3,1)$, $(4,0)$, $(2,5)$,

(x, y)	$ax-y$
$(-3, 1)$	$-3a-1$
$(4, 0)$	$4a$
$(2, 5)$	$2a-5$

$\because$ $k=ax-y$ 在(2，5)有最小值，

$\therefore$ $\begin{cases} 2a-5\le -3a-1 \\ 2a-5\le 4a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a\le \frac{4}{5} \\ a\ge -\frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow -\frac{5}{2}\le a\le \frac{4}{5}$.