高雄市明誠中學 高二數學平時測驗 日期：100.10.25					
範圍	1-5 三角測量	班級	二年____班	姓名	
		座號			

一、填充題（每題 10 分 ）

1. 設 θ 爲銳角，且 $\tan 42°10' = 0.9057$，$\tan 42°20' = 0.9110$，若 $\tan\theta = 0.9090$，則 $\theta =$ ________.

解答　$42°16'$

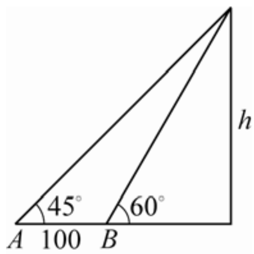
解析　$\tan 42°10' = 0.9057$，$\tan 42°20' = 0.9110$，故利用線性內插法：

$$\tan\theta = 0.9057 + \frac{(0.9110 - 0.9057)}{(42°20' - 42°10')} \cdot (\theta - 42°10'),$$

$$0.9090 = 0.9057 + \frac{(0.9110 - 0.9057)}{(42°20' - 42°10')} \cdot (\theta - 42°10'),$$

$$\theta = 42°10' + \frac{0.9090 - 0.9057}{0.0053} \cdot 10' = 42°10' + 6.22' \approx 42°10' + 6' = 42°16', \quad = 42°16'.$$

2. 某人在 A 處測得高樓頂之仰角爲 $45°$，前進 100 公尺到 B 處，再測得仰角爲 $60°$，則樓高爲__________公尺．



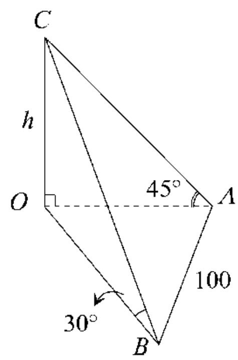
解答　$50(3+\sqrt{3})$

解析　設樓高爲 h，如圖可知，

$$h - \frac{h}{\sqrt{3}} = 100 \quad \Rightarrow \quad (\sqrt{3}-1)h = 100\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \quad h = \frac{100\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} = 50\sqrt{3}(\sqrt{3}+1) = 50(3+\sqrt{3}).$$

3. 自塔的正東 A 處測得塔頂的仰角爲 $45°$，自塔的正南 B 處再測得仰角爲 $30°$，若 $\overline{AB} = 100$ 公尺，則塔高爲________公尺．

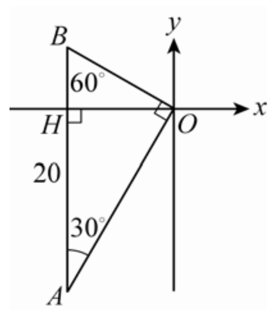


解答　50

解析　設塔高爲 h，則 $\overline{OA} = h$，$\overline{OB} = \sqrt{3}h$，

$$\therefore \quad h^2 + 3h^2 = 100^2 \quad \Rightarrow \quad 4h^2 = 10000 \quad \Rightarrow \quad h = 50.$$

4. 一島在船之北 $30°$ 東，此船往北行駛 20 公里後，發現島在南 $60°$ 東，則船與島之最近距離爲__________公里．



解答　$5\sqrt{3}$

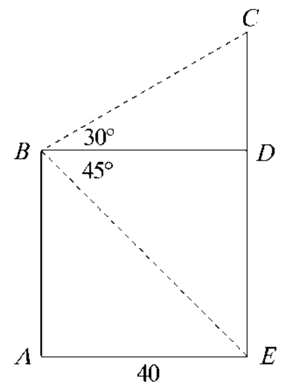
解析　設島爲原點 O，如圖，

由 $30° - 60° - 90°$ 邊長比性質知 $\overline{OB} = 10$，$\overline{OA} = 10\sqrt{3}$，

$$\therefore \quad \overline{OH} = \frac{10 \cdot 10\sqrt{3}}{20} = 5\sqrt{3}.$$

5. 從大馬路旁某大廈一窗口，測得馬路對面另一大廈屋頂的仰角爲 $30°$，屋基的俯角爲 $45°$，已知馬路寬爲 40 公尺，求對面大廈的高度= __________公尺．

解答 $\dfrac{40\sqrt{3}+120}{3}$



解析 $\because\ \angle DBE=45°$，$\therefore\ \overline{AE}=40=\overline{BD}=\overline{DE}$，

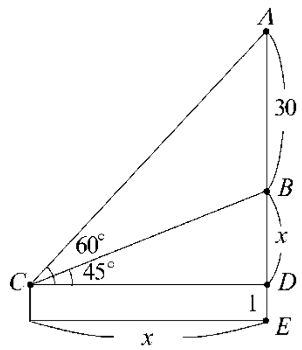
在$\triangle CBD$ 中，$\angle CBD=30°$，

$\therefore\ \tan 30°=\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\overline{CD}}{\overline{BD}}=\dfrac{\overline{CD}}{40}\Rightarrow\ \overline{CD}=\dfrac{40}{\sqrt{3}}=\dfrac{40\sqrt{3}}{3}$

$\Rightarrow\ \overline{CE}=\overline{CD}+\overline{DE}=\dfrac{40\sqrt{3}}{3}+40=\dfrac{40\sqrt{3}+120}{3}$．

6. 小山丘上架設一座高壓電線的鐵塔，塔高 30 公尺，在觀測點 C 測得塔頂的仰角爲 60°，塔底的仰角爲 45°，若 C 點至地面的高度爲 1 公尺，且求得塔底離地面的高度爲 $a+b\sqrt{3}$ 公尺，（其中 a，b 爲正整數），則

數對$(a，b)$ =____________．



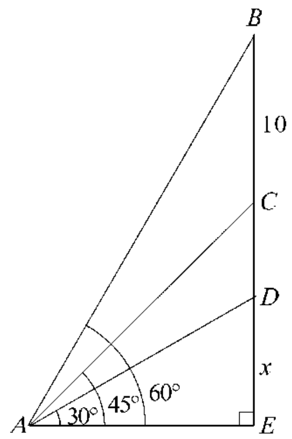
解答 (16，15)

解析 令$\overline{CD}=x$，則$\overline{BD}=x$，而 $30+x=\sqrt{3}x$，

$\therefore\ x=\dfrac{30}{\sqrt{3}-1}=15(\sqrt{3}+1)$，

所求$=\overline{BE}=x+1=16+15\sqrt{3}$，$\therefore\ (a，b)=(16，15)$．

7. 山上有一塔，塔頂有一旗竿，已知旗竿長 10 公尺，今於地面上某點測得山頂，塔頂，旗竿頂的仰角分別爲 30°，45°，60°，求山高= ____ 公尺．



解答 $\dfrac{5(3+\sqrt{3})}{3}$

解析 在$\triangle DAE$ 中，$\angle DAE=30°$，設$\overline{DE}=x$，

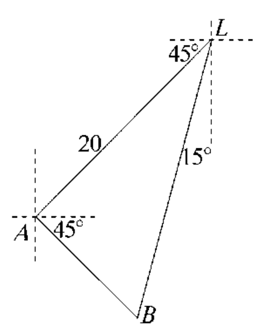
$\therefore\ \tan 30°=\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\overline{DE}}{\overline{AE}}=\dfrac{x}{\overline{AE}}\ \Rightarrow\ \overline{AE}=\sqrt{3}x$，

在$\triangle CAE$ 中，$\angle CAE=45°$，$\therefore\ \overline{AE}=\overline{CE}=\sqrt{3}x$，

在$\triangle BAE$ 中，$\angle BAE=60°$，$\therefore\ \tan 60°=\dfrac{\sqrt{3}}{1}=\dfrac{\overline{BE}}{\overline{AE}}=\dfrac{10+\sqrt{3}x}{\sqrt{3}x}$

$\Rightarrow\ 3x=10+\sqrt{3}x\ \Rightarrow\ x=\dfrac{10}{3-\sqrt{3}}=\dfrac{10(3+\sqrt{3})}{9-3}=\dfrac{5(3+\sqrt{3})}{3}$．

8. 九三號軍艦在燈塔 L 之西南，八一四號軍艦在燈塔 L 之南 15°西，且在九三號軍艦之東南，已知九三號軍艦與燈塔 L 相距 20 公里，則兩軍艦的距離爲____________．



解答 $\dfrac{20\sqrt{3}}{3}$公里

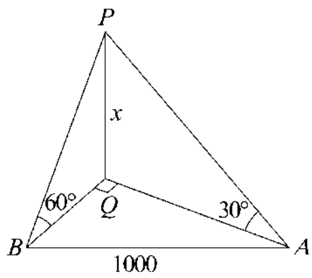
解析　設 A 點表九三號軍艦的位置，B 點表八一四號軍艦的位置，L 點表燈塔的位置，在$\triangle LAB$ 中，$\angle LAB = 90°$，$\overline{LA} = 20$，而$\angle ALB = 45° - 15° = 30°$，

故於$\triangle LAB$ 中，$\overline{AB} = 20\tan 30° = \dfrac{20}{\sqrt{3}} = \dfrac{20\sqrt{3}}{3}$ 公里．

9.A，B 兩地相距 1000 公尺，自 A 點測得正北方一塔頂仰角為 30°，自 B 點測得塔在正東方，塔頂仰角為 60°，則：

(1)此塔高度為____________公尺．

(2) A 點到此塔底之距離為____________公尺．



解答　(1) $100\sqrt{30}$;(2) $300\sqrt{10}$

解析　(1)如圖，設塔高 $\overline{PQ} = x$ 公尺，

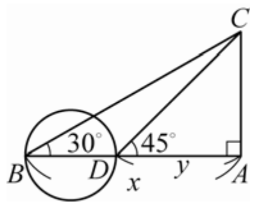
$$\tan 30° = \frac{\overline{PQ}}{\overline{AQ}} \quad \Rightarrow \quad \overline{AQ} = \sqrt{3}\,x \text{ 公尺，} \tan 60° = \frac{\overline{PQ}}{\overline{BQ}} \quad \Rightarrow \quad \overline{BQ} = \frac{x}{\sqrt{3}} \text{ 公尺，}$$

$\triangle ABQ$ 中，$\overline{AQ}^2 + \overline{BQ}^2 = \overline{AB}^2$，

$$\therefore \quad (\sqrt{3}\,x)^2 + \left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2 = 1000^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 300000 \quad \Rightarrow \quad x = 100\sqrt{30}\ (\because \quad x > 0).$$

(2) $\overline{AQ} = \sqrt{3} \times 100\sqrt{30} = 300\sqrt{10}$ 公尺．

10. 在塔高 20 公尺處，俯測地面上一個圓形水池，測得圓池的最近點與最遠點的俯角分別為 45°及 30°，則此圓池的直徑為____________．

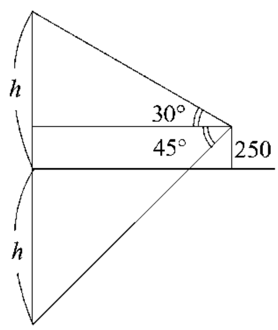


解答　$20(\sqrt{3} - 1)$公尺

解析　如圖，令 $\overline{AB} = x$，$\overline{AD} = y$，$\because \tan 30° = \dfrac{20}{x} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$，$\therefore x = 20\sqrt{3}$，

$\because \tan 45° = \dfrac{20}{y} = 1$，$\therefore y = 20 \Rightarrow$ 直徑 $= x - y = 20\sqrt{3} - 20 = 20(\sqrt{3} - 1)$ 公尺．

11.站在湖中小島的山峰上，看對岸的高峰仰角是 30°，看湖面這高峰的鏡影俯角是 45°，所站的山峰高度為 250 公尺（從湖面算起），則對岸高峰的高度為____________公尺．



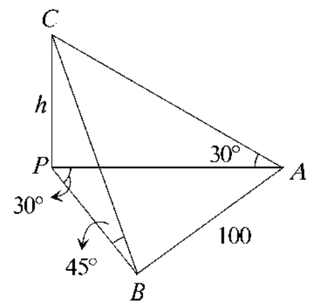
解答　$250(2 + \sqrt{3})$

解析　如圖所示：$\therefore \quad (h - 250)\sqrt{3} = h + 250$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{3}h - 250\sqrt{3} = h + 250 \quad \Rightarrow \quad (\sqrt{3} - 1)h = 250(1 + \sqrt{3}),$$

$\therefore \quad h=\dfrac{250(1+\sqrt{3})}{(\sqrt{3}-1)}=\dfrac{250(1+\sqrt{3})^2}{2}=250(2+\sqrt{3})$.

12.在地面上相距 100 公尺的兩點 A，B 測得塔頂的仰角分別爲 30° 與 45°，塔底爲 P，若 $\angle APB=30°$，則塔高爲____________公尺 .



解答 100

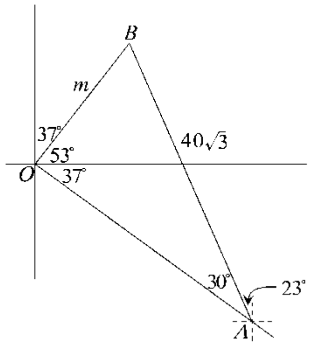
解析 設塔高爲 h，則 $\overline{AP}=\sqrt{3}\,h$，$\overline{BP}=h$，

$\therefore \quad 100^2=(\sqrt{3}\,h)^2+h^2-2\cdot\sqrt{3}\,h\cdot h\cdot\cos30°$

$\Rightarrow \quad 100^2=3h^2+h^2-3h^2=h^2 \quad \Rightarrow \quad h=100$.

13.某船以每小時 20 公里之速度向南 53°東航行,於上午十時測得燈塔之方向爲北 37°東，此時船與燈塔之距離爲 m 公里，至同日 t 時（24 時制），測得該塔之方向爲北 23°西，此時船與燈塔之距離爲 $40\sqrt{3}$ 公里，則：

(1)$m=$____________公里 .　(2)而 $t=$____________時 .



解答 (1)$20\sqrt{3}$;(2)13

解析 設上午十時船在 O 點，t 時在 A 點，燈塔在 B 點，

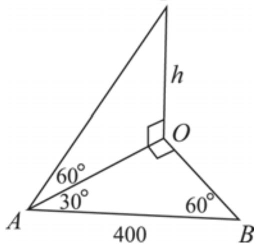
如圖：$\angle AOB=37°+53°=90°$，$\angle OAB=53°-23°=30°$，

在$\triangle OAB$ 中，$\sin30°=\dfrac{\overline{OB}}{\overline{AB}} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{1}{2}=\dfrac{m}{40\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad m=20\sqrt{3}$,

$\overline{OA}=60 \quad \Rightarrow \quad t=10+\dfrac{60}{20}=13$，即爲 13 時，也就是下午 1 時 .

14.某人隔著河，想測河對岸山高，在 A 點觀測山時，山在 A 的東 30°北，山頂的仰角爲 60°，若自 A 點向東走 400 公尺到達一點 B，測得山在 B 的西 60°北，求山高爲___________公尺 .

解答 600



解析 設 O 爲山腳，P 爲山頂，$\overline{OP}=h$ 爲山高,

$\because \overline{AB}=400$, $\angle ABO=60°$, $\therefore \quad \overline{OA}=200\sqrt{3}$,

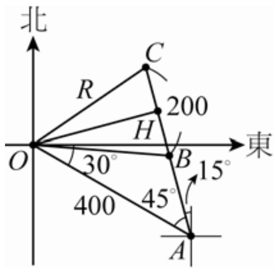
在$\triangle AOP$ 中，$\tan60°=\dfrac{h}{\overline{OA}} \Rightarrow h=\overline{OA}\tan60°=200\sqrt{3}\times\sqrt{3}=600$.

15.一颱風中心在 O 點的東 30°南的海面上 A 處，此颱風以每小時 50 公里的速度向北 15°西方向直線前進，且 $\overline{AO}=400$ 公里，若 O 點在此暴風圈內前後共計有 4 小時，問颱風的暴風半徑爲____________公里 .

解答 300

解析　設暴風半徑 R，接觸點爲 B，離開點爲 C，

依題意，前後 4 小時颱風走了 $50\times 4=200=\overline{BC}$ 公里，



如圖△AOH 中，$\angle OAH=45°$，$\overline{AO}=400\Rightarrow\overline{OH}=200\sqrt{2}$，

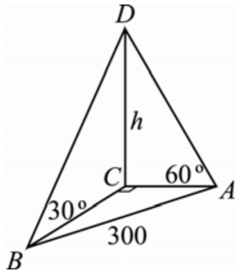
在△BOH 中，$R^2=100^2+(200\sqrt{2})^2$，∴ $R=300$ 公里．

16.某一人在一塔的正東 A 處，測得塔頂的仰角爲 60°，他走到塔的正南 B 處，測得塔頂的仰角爲 45°，若 A, B 的距離爲 300 公尺，則塔高爲__________公尺．

解答　$150\sqrt{3}$

解析　如圖，設塔高 $\overline{CD}=h$（公尺），則 $\dfrac{h}{\overline{AC}}=\tan 60°$，即 $\overline{AC}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}h$，且 $\dfrac{h}{\overline{BC}}=\tan 45°$，

即 $\overline{BC}=h$，

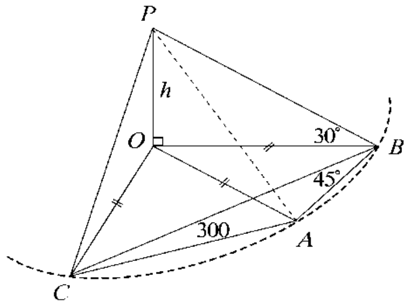


∵△ ABC 爲直角三角形，∴ $\overline{AC}^2+\overline{BC}^2=\overline{AB}^2$

$\Rightarrow\dfrac{1}{3}h^2+h^2=300^2\Rightarrow h^2=\dfrac{3}{4}\times 300^2\Rightarrow h=150\sqrt{3}$（公尺）．

17.從平地上 A，B，C 三點測得國璽樓樓頂之仰角均爲 30°，若 $\angle ABC=45°$，而 $\overline{AC}=300$ 公尺，則此大樓的高爲__________公尺．

解答　$50\sqrt{6}$



解析　從 A，B，C 三點測得樓頂之仰角均爲 30°

$\Rightarrow$　如圖：$\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}$ 且 A，B，C 共圓，

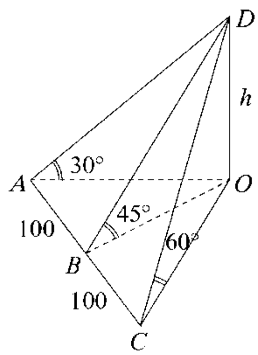
設 $\overline{OP}=h$　$\Rightarrow$　$\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}=\sqrt{3}\,h$，

於△ABC 中，$\overline{AC}=2R\sin 45°$，$R=\overline{OA}$

$\Rightarrow$　$300=2\cdot\sqrt{3}\,h\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　$\Rightarrow$　$h=50\sqrt{6}$．

18.在一公路上之三相異點 A，B，C，測得電信局發射塔的仰角分別爲 30°，45°，60°，若 $\overline{AB}=\overline{BC}=100$，則發射塔的高度爲__________．

解答　$50\sqrt{6}$



解析　設發射塔高度爲 h，則 $\overline{OA}=\sqrt{3}\,h$，$\overline{OB}=h$，$\overline{OC}=\dfrac{h}{\sqrt{3}}$，

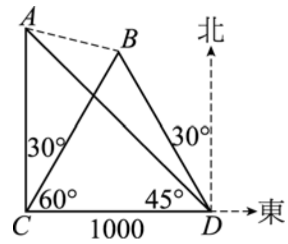
由△OAC 之中線定理知 $\overline{OA}^2+\overline{OC}^2=2\,\overline{OB}^2+\dfrac{1}{2}\,\overline{AC}^2$，

∴　$3h^2+\dfrac{h^2}{3}=2h^2+\dfrac{1}{2}\times 200^2$　$\Rightarrow$　$\dfrac{5h^2}{3}=h^2+100^2$

$\Rightarrow \quad h^2 = 100^2 \cdot \dfrac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad h = 50\sqrt{6}$.

19.在 A 點正南方一點 C 測得 B 點在北 30°東，往正東走 1000 公尺到達 D 點，又測得 A 點在北 45°西，B 點在北 30°西，如圖所示．求 A, B 兩點的距離．

解答 $500(\sqrt{6}-\sqrt{2})$



解析 如圖，$\angle BCD = 60° = \angle BDC$，

$\therefore \Delta BCD$ 爲正三角形 $\overline{CB} = \overline{CD} = 1000$，$\triangle CAD$ 中

$45°-45°-90°$，$\overline{AC} = \overline{DC} = 1000$.

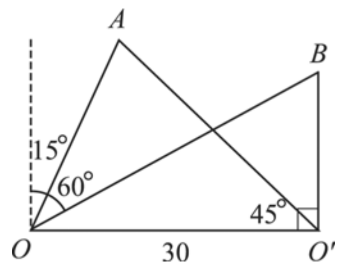
$\triangle ACB$ 中，由餘弦定理，

$$\overline{AB}^2 = (1000)^2 + 1000^2 - 2 \cdot 1000 \cdot 1000 \cdot \cos 30° = 1000^2(2-\sqrt{3})$$

$$\Rightarrow \overline{AB} = 1000\sqrt{2-\sqrt{3}} = 1000\sqrt{\frac{4-2\sqrt{3}}{2}} = 1000 \cdot \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}} = 500(\sqrt{6}-\sqrt{2})$$

20.有一艘郵輪往正東方向航行，在北 15°東發現燈塔 A，在北 60°東發現燈塔 B，郵輪繼續航行 30 公里後，再測得燈塔 A 在北 45°西，燈塔 B 在正北方，求燈塔 A 與 B 的距離爲________公尺．

解答 $10\sqrt{6}$



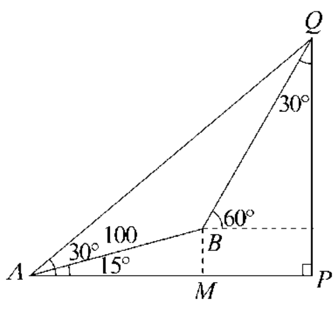
解析 如圖，$\angle OAO' = 60° = \angle OBO'$，$\angle OO'B = 90°$，

$\therefore A$，O，O'，B 共圓

$\Rightarrow \triangle OAO'$ 外接圓直徑=$\triangle OAB$ 外接圓直徑$=\overline{OB}$，

由正弦定理，$\therefore \dfrac{30}{\sin 60°} = \dfrac{\overline{AB}}{\sin 45°} \Rightarrow \overline{AB} = 10\sqrt{6}$.

21.某人於山麓測得山頂的仰角爲 30°，今沿山麓循 15°斜坡上行 100 公尺，再測得山頂的仰角爲 60°，則山高爲____________公尺．（$\sin 15° = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$）



解答 $50\sqrt{2}$

解析 $\angle BAM = 15° \Rightarrow \angle BAQ = 15°$，$\angle ABM = 75°$

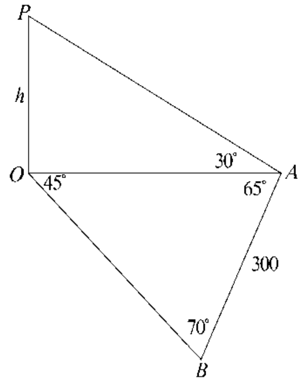
$\Rightarrow \angle ABQ = 135°$，$\angle BQA = 30°$，

$\dfrac{\overline{BQ}}{\sin 15°} = \dfrac{100}{\sin 30°} \quad \Rightarrow \quad \overline{BQ} = 50(\sqrt{6}-\sqrt{2})$，

$\therefore$ 山高 $=\overline{BQ}\sin 60°+100\sin 15°=50(\sqrt{6}-\sqrt{2})\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}+100\cdot\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}=50\sqrt{2}$.

22.平面上有 A，B 兩點，A 在塔的正東，B 在塔的東南且在 A 的南 25°西 300 公尺處，在 A 測得塔頂的仰角爲 30°，則塔高爲_________公尺．

（$\sin 70°=0.9397$，$\sin 45°=0.7071$，$\sqrt{3}=1.732$；塔高小數點以下完全捨去．）



解答　230

解析　如圖：塔 $\overline{OP}$ 之高度爲 h 公尺，

$\angle AOB=45°,\angle OAB=65° \Rightarrow \angle OBA=70°,\triangle CAB$ 中，

由$\triangle OAB$ 中，正弦定理，$\dfrac{\sin 45°}{300}=\dfrac{\sin 70°}{\overline{OA}}$

$$\Rightarrow \overline{OA}=\frac{300\sin 70°}{\sin 45°}$$

$$\Rightarrow h=\overline{OA}\tan 30°=\frac{300\sin 70°}{\sqrt{3}\sin 45°}=\frac{300\times 0.9397}{1.732\times 0.7071}\fallingdotseq 230\text{（公尺）}.$$

23.正$\triangle ABC$ 之邊長爲 20，動點 P 自 A 往 B 移動，Q 點自 B 往 C 移動，若 P 之速度爲 Q 之兩倍，求 $\overline{PQ}$ 之最小值____________．

解答　$\dfrac{10\sqrt{21}}{7}$

解析　設 x 小時後，$\overline{PQ}$ 之值爲

$$\sqrt{(20-2x)^2+x^2-2(20-2x)x\cdot\cos 60°}=\sqrt{400-80x+4x^2+x^2-20x+2x^2}$$

$$=\sqrt{7x^2-100x+400}=\sqrt{7(x-\frac{50}{7})^2+\frac{300}{7}}\geq\frac{10\sqrt{21}}{7}$$，$\therefore$ $\overline{PQ}$ 之最小值爲 $\dfrac{10\sqrt{21}}{7}$.