高雄市明誠中學 高二數學平時測驗 日期：100.09.27					
範圍	1-3、4 正、餘弦定理和角公式	班級	二年____班	姓名	
		座號			

一、填充題 (每題 10 分)

1.△ABC 中，$\angle A=45°$，$\angle B=60°$，$\overline{BC}=2$，則：(1) $\overline{AB}=$____________． (2) $\overline{AC}=$____________．

解答 (1) $\sqrt{3}+1$;(2) $\sqrt{6}$

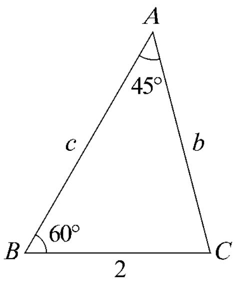
解析 (1)$\angle C=180°-45°-60°=75°$，

由正弦定理：$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C} \Rightarrow \dfrac{2}{\sin 45°}=\dfrac{c}{\sin 75°}$

$\Rightarrow c\sin 45°=2\sin 75° \Rightarrow c=\dfrac{2\sin 75°}{\sin 45°}=2\times\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\times\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{3}+1$.

(2)由正弦定理：$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B} \Rightarrow \dfrac{2}{\sin 45°}=\dfrac{b}{\sin 60°}$

$\Rightarrow b\sin 45°=2\sin 60° \Rightarrow c=\dfrac{2\sin 60°}{\sin 45°}=2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{6}$.



2.△ABC 中，$\overline{AB}=\sqrt{3}$，$\overline{AC}=1$，$\angle B=30°$，則：

(1) $\overline{BC}=$____________． (2) $\angle C=$____________．

解答 (1) 1 或 2 ;(2) 120°或 60°

解析 (1)由餘弦定理知，$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$

$\Rightarrow\ 1^2=a^2+(\sqrt{3})^2-2a\cdot\sqrt{3}\cos 30° \Rightarrow a^2-3a+2=0 \Rightarrow a=1$ 或 2，

(2)△ABC 中，① $\overline{BC}=1=\overline{AC}$，$\angle A=\angle B=30°$，$\angle C=180°-30°-30°=120°$.

② $\overline{BC}=2$, $\overline{AC}=1$，$\overline{AB}=\sqrt{3} \Rightarrow 1^2+\sqrt{3}^2=2^2$

$\therefore \angle A=90°$，$\angle B=30°$，$\angle C=180°-30°-90°=60°$.

3.△ABC 中，$b=4$，$c=2$，$\tan B=\sqrt{15}$，則 $a=$____________．

解答 4

解析 $\tan B=\dfrac{\sqrt{15}}{1}$，$\angle B$ 爲銳角 $\Rightarrow \cos B=\dfrac{1}{4}$，又 $b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$

$\Rightarrow\ 16=4+a^2-2\cdot 2\cdot a\cdot\dfrac{1}{4} \Rightarrow a^2-a-12=0 \Rightarrow a=4$.

4.$\triangle ABC$ 中，$a=\sqrt{3}-1$，$c=\sqrt{3}+1$，$\angle A=15°$，則 $b=$____________．

解答 $2\sqrt{2}$ 或 $\sqrt{6}$

解析 $(\sqrt{3}-1)^2=(\sqrt{3}+1)^2+b^2-2b(\sqrt{3}+1)\cos 15°$

$$\Rightarrow\ 4-2\sqrt{3}=4+2\sqrt{3}+b^2-2b(\sqrt{3}+1)\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}=4+2\sqrt{3}+b^2-\sqrt{2}(2+\sqrt{3})b$$

$$\Rightarrow\ b^2-(2\sqrt{2}+\sqrt{6})b+4\sqrt{3}=0\ \Rightarrow\ (b-2\sqrt{2})(b-\sqrt{6})=0\ \Rightarrow\ b=2\sqrt{2}\text{ 或 }\sqrt{6}\ .$$

5.$\triangle ABC$ 之三邊長為 8，10，12，則：

(1)$\triangle ABC$ 之面積為______．　(2)$\triangle ABC$ 之外接圓半徑為_________．

(3)$\triangle ABC$ 最大邊上之中線長為_____．　(4)$\triangle ABC$ 之內切圓半徑為_________．

解答 (1)$15\sqrt{7}$;(2)$\frac{16\sqrt{7}}{7}$;(3)$\sqrt{46}$;(4)$\sqrt{7}$

解析 (1)設 $a=8$，$b=10$，$c=12$，則 $s=\frac{1}{2}(8+10+12)=15$，

由海龍公式$\triangle=\sqrt{15\cdot 3\cdot 5\cdot 7}=15\sqrt{7}$ ．

(2)由$\triangle=\frac{abc}{4R}\ \Rightarrow\ 15\sqrt{7}=\frac{8\times 10\times 12}{4R}\ \Rightarrow\ R=\frac{240}{15\sqrt{7}}=\frac{16\sqrt{7}}{7}$ ．

(3)最大邊上之中線長 $=\frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}=\frac{1}{2}\sqrt{2\cdot 8^2+2\cdot 10^2-12^2}=\sqrt{46}$ ．

(4)由 $\triangle=rs\Rightarrow r=\frac{\Delta}{s}=\frac{15\sqrt{7}}{15}=\sqrt{7}$

6.(1)Δ三高長 12、8、6，求Δ面積為__________________。

(2)Δ三中線長 5、6、7，求Δ面積為____________________。

解答 (1)$96\sqrt{15}$;(2)$8\sqrt{6}$

解析 (1) 設 $h_a=12,\ \ h_b=8,\ \ h_c=6\Rightarrow a:b:c=\frac{1}{h_a}:\frac{1}{h_b}:\frac{1}{h_c}=\frac{1}{12}:\frac{1}{8}:\frac{1}{6}=2:3:4$

又令 $a=2t,\ \ b=3t,\ \ c=4t\Rightarrow\cos A=\frac{3^2+4^2-2^2}{2\times 3\times 4}=\frac{7}{8},\sin A=\frac{\sqrt{15}}{8}$

又 $\sin A=\frac{h_c}{b}=\frac{6}{3t}=\frac{2}{t}$，即 $\frac{\sqrt{15}}{8}=\frac{2}{t}\Rightarrow t=\frac{16}{\sqrt{15}}=\frac{16\sqrt{15}}{15}$

$$a=2t=\frac{32\sqrt{15}}{15}\Rightarrow\Delta=\frac{1}{2}\times\frac{32\sqrt{15}}{2}\times 12=96\sqrt{15}$$

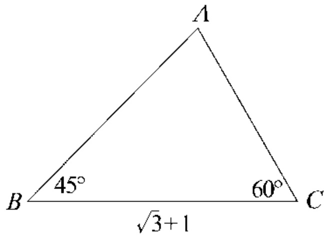
(2)$\Delta=\frac{4}{3}\Delta_m=\frac{4}{3}\sqrt{9\cdot 4\cdot 3\cdot 2}=8\sqrt{6}$

7.$\triangle ABC$ 中，$\angle B = 45°$，$\angle C = 60°$，$a = \sqrt{3} + 1$，求外接圓半徑 ＝______．

解答 $\sqrt{2}$

解析 $\angle B = 45°$，$\angle C = 60°$ $\Rightarrow$ $\angle A = 75°$，

由正弦定理知，$\dfrac{\overline{BC}}{\sin A} = \dfrac{\overline{AB}}{\sin C}$

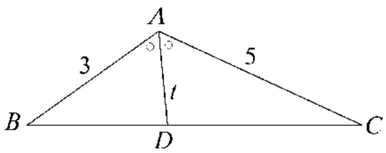


$$\Rightarrow \overline{AB} = \frac{\overline{BC}\sin C}{\sin A} = \frac{(\sqrt{3}+1)\sin 60°}{\sin 75°} = \frac{(\sqrt{3}+1)\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}} = \sqrt{6},$$

又 $2R = \dfrac{\overline{AB}}{\sin C}$ $\Rightarrow$ $R = \dfrac{\overline{AB}}{2\sin C} = \dfrac{\sqrt{6}}{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{2}$ ．

8.設$\triangle ABC$ 中，$\angle A$ 的分角線交 $\overline{BC}$ 於 D，已知 $\overline{AB} = 3$，$\overline{AC} = 5$，$\angle A = 120°$，則 $\overline{AD}$ 的長為________．

解答 $\dfrac{15}{8}$



解析

由$\triangle ABC = \triangle ABD + \triangle ACD$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\cdot 3\cdot t\cdot \sin 60° + \frac{1}{2}\cdot 5\cdot t\cdot \sin 60° = \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 5\cdot \sin 120° \Rightarrow 8t = 15 \Rightarrow t = \frac{15}{8}.$$

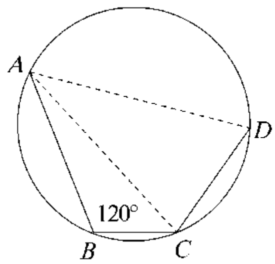
9.圓內接四邊形 $ABCD$ 中，若 $\overline{AB} = 6$，$\overline{BC} = 4$，$\overline{CD} = 6$，$\angle B = 120°$，則：

(1) $\overline{AC}$ = ____________． (2) $\overline{AD}$ = ____________． (3)四邊形 $ABCD$ 的面積 ＝____________．

解答 (1)10;(2)$2\sqrt{19}$;(3)$21\sqrt{3}$

解析 (1)圓內接四邊形 $ABCD$，$\angle B = 120°$ $\Rightarrow$ $\angle D = 60°$，於$\triangle ABC$ 中，利用餘弦定理，

$$\overline{AC}^2 = 6^2 + 4^2 - 2\cdot 6\cdot 4\cdot \cos 120° = 76 \Rightarrow \overline{AC} = \sqrt{76} = 2\sqrt{19}.$$



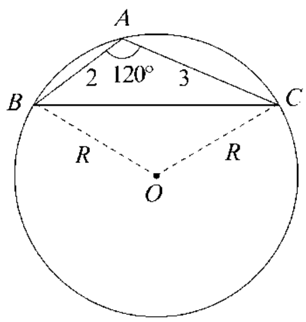
(2)於$\triangle ADC$ 中，設 $\overline{AD} = d$，再用餘弦定理，

$$\overline{AC}^2 = 6^2 + d^2 - 2\cdot 6\cdot d\cdot \cos 60° \Rightarrow d^2 - 6d - 40 = 0 \Rightarrow d = 10.$$

(3)四邊形 $ABCD$ 之面積 $= \dfrac{1}{2}\cdot 6\cdot 4\cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\cdot 6\cdot 10\cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 21\sqrt{3}$ ．

10.已知$\triangle ABC$ 內接於半徑為 R 的一個圓，且 $\overline{AB} = 2$，$\overline{AC} = 3$，$\angle A = 120°$，則：

(1) $\overline{BC}$ = ____________． (2)R = ____________．



解答 (1) $\sqrt{19}$;(2)$\dfrac{\sqrt{57}}{3}$

解析 $\overline{BC}^2 = 2^2 + 3^2 - 2\cdot 2\cdot 3\cdot \cos 120° = 4 + 9 + 6 = 19$，∴ $\overline{BC} = \sqrt{19}$，

在$\triangle BOC$ 中，$\angle BOC = 120°$，$\overline{OB} = \overline{OC} = R$，

$\cos 120° = \dfrac{R^2 + R^2 - (\sqrt{19})^2}{2 \cdot R \cdot R} \Rightarrow -\dfrac{1}{2} = \dfrac{2R^2 - 19}{2R^2} \Rightarrow 3R^2 = 19$，故 $R = \dfrac{\sqrt{57}}{3}$.

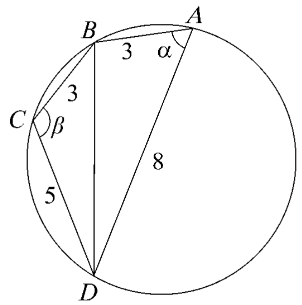
11.已知圓內接四邊形 $ABCD$，$\overline{AB} = \overline{BC} = 3$，$\overline{CD} = 5$，$\overline{DA} = 8$，則
(1) $\overline{BD} =$ ＿＿＿＿＿＿ . (2) 四邊形 $ABCD$ 面積= ＿＿＿＿＿＿ .

解答 (1) 7;(2) $\dfrac{39\sqrt{3}}{4}$

解析 (1)利用餘弦定理，則 $\begin{cases} \overline{BD}^2 = 8^2 + 3^2 - 2 \times 8 \times 3 \times \cos\alpha \cdots\cdots ① \\ \overline{BD}^2 = 5^2 + 3^2 - 2 \times 5 \times 3 \times \cos\beta \cdots\cdots ② \end{cases}$,

① = ② $\Rightarrow$ $64 - 48\cos\alpha = 25 - 30\cos\beta$,
$64 - 48\cos\alpha = 25 - 30(-\cos\alpha)$（$\because$ $\alpha + \beta = 180°$），
$64 - 48\cos\alpha = 25 + 30\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{1}{2}$ 代入①,

$\overline{BD}^2 = 8^2 + 3^2 - 2 \times 8 \times 3 \times \dfrac{1}{2} = 49$，$\therefore$ $\overline{BD} = 7$.



(2) $s = \dfrac{3+3+5+8}{2} = \dfrac{19}{2}$

圓內接四邊形 $ABCD$ 面積 $= \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)} = \sqrt{\dfrac{13}{2} \cdot \dfrac{13}{2} \cdot \dfrac{9}{2} \cdot \dfrac{3}{2}} = \dfrac{39\sqrt{3}}{4}$

12.四邊形的兩對角線長爲 8 與 10,若兩對角線夾角爲 α , β ,且 $\alpha = 5\beta$,則此四邊形之面積爲＿＿＿.

解答 20

解析 $\alpha + \beta = 180° \Rightarrow 6\beta = 180° \Rightarrow \beta = 30°$，四邊形面積 $= \dfrac{1}{2} \times 8 \times 10 \sin 30° = 20$.

13.設 $0° < \alpha < 90° < \beta < 180°$,且 $\sin\alpha = \dfrac{13}{14}$, $\sin\beta = \dfrac{11}{14}$,則 (1) $\cos(\alpha - \beta) =$ ＿＿＿.(2) $\alpha - \beta =$ ＿＿＿＿.

解答 (1) $\dfrac{1}{2}$;(2) $-60°$

解析 $\because$ $0° < \alpha < 90° < \beta < 180°$，且 $\sin\alpha = \dfrac{13}{14}$，$\sin\beta = \dfrac{11}{14}$，$\therefore$ $\cos\alpha = \dfrac{3\sqrt{3}}{14}$，$\cos\beta = -\dfrac{5\sqrt{3}}{14}$，

故 $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = \dfrac{3\sqrt{3}}{14}(-\dfrac{5\sqrt{3}}{14}) + \dfrac{13}{14} \cdot \dfrac{11}{14} = \dfrac{98}{196} = \dfrac{1}{2}$,

$\because$ $-180° < -\beta < -90°$，且 $0 < \alpha < 90°$，$\therefore$ $-180° < \alpha - \beta < 0°$，故 $\alpha - \beta = -60°$.

14.若$90°<\alpha<180°$, $-180°<\beta<-90°$，且$\tan\alpha=-\dfrac{1}{2}$, $\tan\beta=\dfrac{1}{3}$，則

(1) $\tan(\alpha-\beta)=$ ____________ . (2) $\alpha-\beta$ 之值爲____________ .

解答 (1) -1;(2)$315°$

解析 $90°<\alpha<180°$， $-180°<\beta<-90°\Rightarrow 180°<\alpha-\beta<360°$，

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{(-\frac{1}{2})-(\frac{1}{3})}{1+(-\frac{1}{2})(\frac{1}{3})}=-1,\qquad \therefore \alpha-\beta=315° .$$

15.設 $\sin92°=a$, $\cos48°=b$, 以 a, b 表示： (1) $\sin140°=$ ___________ . (2) $\cos44°=$ ___________ .

解答 (1)$ab-\sqrt{1-a^2}\sqrt{1-b^2}$;(2)$-b\sqrt{1-a^2}+a\sqrt{1-b^2}$

解析 $\sin92°=a \Rightarrow \cos92°=-\sqrt{1-a^2}$， $\cos48°=b \Rightarrow \sin48°=\sqrt{1-b^2}$.

(1) $\sin140°=\sin(92°+48°)=\sin92°\cos48°+\cos92°\sin48°=ab-\sqrt{1-a^2}\sqrt{1-b^2}$.

(2) $\cos44°=\cos(92°-48°)=\cos92°\cos48°+\sin92°\sin48°=-b\sqrt{1-a^2}+a\sqrt{1-b^2}$.

16.$\cos316°\sin164°-\sin224°\cos344°=$____________ .

解答 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

解析 原式 $=\cos(360°-44°)\sin(180°-16°)-\sin(180°+44°)\cos(360°-16°)$

$=\cos44°\sin16°+\sin44°\cos16°=\sin(44°+16°)=\sin60°=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

17.以 $x-\cos40°$除 $f(x)=3x-4x^3$ 之餘式爲____________ .

解答 $\dfrac{1}{2}$

解析 由餘式定理以 $x-\cos40°$除 $f(x)=3x-4x^3$ 的餘式爲 $f(\cos40°)$,

$f(\cos40°)=3\cos40°-4\cos^3 40°=-(4\cos^3 40°-3\cos40°)$

$=-\cos(3\times40°)=-\cos120°=-(-\dfrac{1}{2})=\dfrac{1}{2}$.

18.設 $\tan\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{3}{4}$，則 $4\cos\theta+3\sin\theta=$ ____________ .

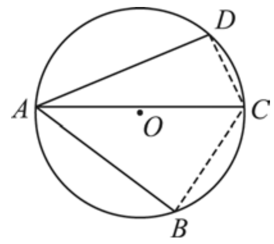
解答 4

解析 原式 $=4\cdot\dfrac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}+3\cdot\dfrac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}=4\cdot\dfrac{1-\frac{9}{16}}{1+\frac{9}{16}}+3\cdot\dfrac{2\cdot\frac{3}{4}}{1+\frac{9}{16}}=4$.

$=4-4\,[\dfrac{64}{27}+3\cdot(\dfrac{-7}{18})\cdot\dfrac{4}{3}]=\dfrac{20}{27}$.

19.如圖所示，有一半徑爲 1 的圓，圓上有四點 A， B， C， D，若 $\overline{CD}=\frac{10}{13}$，

$\overline{BC}=\frac{6}{5}$， $\angle BAC=\alpha$， $\angle CAD=\beta$，則 $\sin(\alpha+\beta)=$____________ .



解答 $\frac{56}{65}$

解析 由正弦定理：$\frac{\overline{CD}}{\sin\beta}=\frac{\overline{BC}}{\sin\alpha}=2R=2$， ∴ $\sin\alpha=\frac{3}{5}$， $\sin\beta=\frac{5}{13}$

$\Rightarrow \sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta=\frac{3}{5}\cdot\frac{12}{13}+\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{13}=\frac{56}{65}$.

20.設 $\tan A=3$， $\tan B=5$，則 $\frac{\sin(A-B)}{\cos(A+B)}=$____________ .

解答 $\frac{1}{7}$

解析 $\frac{\sin(A-B)}{\cos(A+B)}=\frac{\sin A\cdot\cos B-\cos A\cdot\sin B}{\cos A\cdot\cos B-\sin A\cdot\sin B}\xlongequal{\text{同除}\cos A\cos B}\frac{\tan A-\tan B}{1-\tan A\tan B}=\frac{3-5}{1-15}=\frac{1}{7}$.

21.設 $90°<\theta<180°$， $\sin\theta=\frac{2}{\sqrt{5}}$，則 (1) $\sin2\theta=$____________ . (2) $\cos2\theta=$____________ .

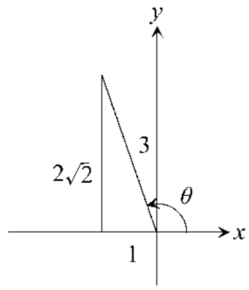
解答 (1) $-\frac{4}{5}$;(2) $-\frac{3}{5}$

解析 $90°<\theta<180°$， $\sin\theta=\frac{2}{\sqrt{5}}$ $\Rightarrow$ $\cos\theta=-\frac{1}{\sqrt{5}}$.

(1) $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = 2\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot(-\frac{1}{\sqrt{5}})=-\frac{4}{5}$.

(2) $\cos2\theta = 1-2\sin^2\theta = 1-2\cdot(\frac{2}{\sqrt{5}})^2=-\frac{3}{5}$.

22.設 $90°<\theta<180°$，且 $\cos\theta=-\frac{1}{3}$，則 $\sin3\theta+\cos3\theta=$____________ .



解答 $\frac{23-10\sqrt{2}}{27}$

解析 $90°<\theta<180°$， $\cos\theta=-\frac{1}{3}$， ∴ $\sin\theta=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，

∴ $\sin3\theta=3(\frac{2\sqrt{2}}{3})-4(\frac{2\sqrt{2}}{3})^3=\frac{-10\sqrt{2}}{27}$， $\cos3\theta=4(-\frac{1}{3})^3-3(-\frac{1}{3})=\frac{23}{27}$，

∴ $\sin3\theta+\cos3\theta=\frac{23-10\sqrt{2}}{27}$.