高雄市明誠中學 高二數學平時測驗　　日期：100.09.13					
範圍	1-2 廣義角三角函數	班級	二年____班	姓名	
		座號			

一、填充題（每題 10 分 ）

1.設 2000°的最小正同界角為 α，最大負同界角為 β，則數對$(\alpha，\beta)=$____________．

解答　(200°，－160°)

解析　$2000°=360°\times5+200°\Rightarrow$ 最小正同界角 $=200°$

$2000°=360°\times6+(-160°)\Rightarrow$ 最大負同界角 $=-160°$．

2.－1234°的最小正同界角為____________．

解答　206°

解析　$-1234°=-360°\times4+206°$．

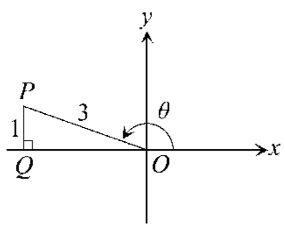
3.設 $\sin\theta=\dfrac{1}{3}$，$90°<\theta<180°$，則：(1) $\cos\theta=$____________．　(2) $\tan(-540°+\theta)=$____________．

解答　(1) $-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$;(2) $-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

解析　(1)如圖所示，令 $\overline{PO}=3$，$\overline{PQ}=1$，則 $\overline{OQ}=\sqrt{3^2-1^2}=2\sqrt{2}$，

$\because$ $90°<\theta<180°$，$\therefore$ $\cos\theta=-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

(2) $\tan(-540°+\theta)=-\tan(540°-\theta)=-\tan(90°\times6-\theta)=+\tan\theta=-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$．



4.求值：$\cos20°+\cos40°+\cos60°+\cdots+\cos160°+\cos180°=$____________．

解答　-1

解析　原式 $=\cos20°+\cos40°+\cos60°+\cos80°+(-\cos80°)+(-\cos60°)+(-\cos40°)$

$+(-\cos20°)+(-1)=-1$．

5.$\sin10°+\sin20°+\sin30°+\cdots+\sin350°+\sin360°$之值為____________．

解答　0

解析　$\because\sin(360°-\theta)=-\sin\theta$，

$\therefore$原式$=\sin10°+\sin20°+\sin30°+\cdots+\sin150°+\sin160°+\sin170°+\sin180°$

$+(-\sin170°)+(-\sin160°)+(-\sin150°)+\cdots+(-\sin10°)+\sin360°$

$=\sin180°+\sin360°=0+0=0$．

6.求 $\sin(-1560°)$的值 $=$____________．

解答　$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

解析 $\sin(-1560°) = -\sin1560° = -\sin(90°\times17+30°) = -\cos30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

7.已知 $\tan\theta < 0 < \sin\theta$，則 θ 爲第____________象限角 .

解答 二

解析 ∵ $\tan\theta < 0$，∴ θ 在二、四象限；

∵ $\sin\theta > 0$，∴ θ 在一、二象限，

∵ $\tan\theta < 0 < \sin\theta$，∴ θ 在第二象限 .

8.求下列各值：

(1) $\sin120°\cos150° - \cos225°\sin315° =$ ____________ .

(2) $\sin1080° + \cos180° + \tan180° + \tan360° + \cos720° + \sin270° =$ ____________ .

解答 (1) $-\frac{5}{4}$;(2) -1

解析 (1)原式 $= \cos30°(-\sin60°) - (-\cos45°)(-\cos45°)$

$= \frac{\sqrt{3}}{2} \times (-\frac{\sqrt{3}}{2}) - (-\frac{\sqrt{2}}{2}) \times (-\frac{\sqrt{2}}{2}) = -\frac{5}{4}$.

(2)原式 $= 0 + (-1) + 0 + 0 + 1 + (-1) = -1$.

9.$\sin47°\cos(-583°) + \sin(-583°)\sin223° =$ ____________ .

解答 -1

解析 原式 $= \sin47°\cos583° - \sin583°\sin223°$

$= \sin47°(-\cos43°) - (-\sin43°)(-\sin43°)$

$= \cos43°(-\cos43°) - \sin^2 43° = -(\cos^2 43° + \sin^2 43°) = -1$.

10.$x \in \mathbb{R}$，$\sin x + \cos x = \frac{5}{4}$，則： (1) $\cos x \cdot \sin x =$ ____________ . (2) $\sin x - \cos x =$ ____________ .

解答 (1) $\frac{9}{32}$;(2) $\pm\frac{\sqrt{7}}{4}$

解析 $\sin x + \cos x = \frac{5}{4}$ 平方得 $\sin^2 x + 2\sin x\cos x + \cos^2 x = \frac{25}{16}$

$\Rightarrow 1 + 2\sin x\cos x = \frac{25}{16} \Rightarrow \sin x\cos x = \frac{9}{32}$，

又 $(\sin x - \cos x)^2 = \sin^2 x - 2\sin x\cos x + \cos^2 x = 1 - 2 \times \frac{9}{32} = \frac{7}{16}$，

∵ $x \in \mathbb{R}$，∴ $\sin x - \cos x = \pm\frac{\sqrt{7}}{4}$.

11.設 $\sin^3\theta + \cos^3\theta = 1$，則： (1) $\sin\theta + \cos\theta =$ ____________ . (2) $\sin^4\theta + \cos^4\theta =$ ____________ .

解答 (1)1;(2)1

解析 (1)設 $\sin\theta + \cos\theta = k \Rightarrow 1 + 2\sin\theta\cos\theta = k^2 \Rightarrow \sin\theta \cdot \cos\theta = \frac{k^2-1}{2}$，

由 $\sin^3\theta + \cos^3\theta = 1 \Rightarrow (\sin\theta + \cos\theta)(\sin^2\theta - \sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta) = 1$

$(\sin\theta + \cos\theta)(1 - \sin\theta\cos\theta) = 1 \Rightarrow k(1 - \frac{k^2-1}{2}) = 1$

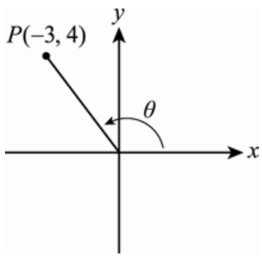
$\Rightarrow\ k(3-k^2)=2\ \ \Rightarrow\ \ k^3-3k+2=0\ \ \Rightarrow\ \ (k-1)^2(k+2)=0$,

$\because\ k\neq-2$（否則 $\sin\theta=\cos\theta=-1$），$\therefore\ k=1\Rightarrow\begin{cases}\sin\theta+\cos\theta=1\\ \sin\theta\cos\theta=\dfrac{1^2-1}{2}=0\end{cases}$

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & +0 & -3 & +2 & \underline{1} \\ & +1 & +1 & -2 & \\ \hline 1 & +1 & -2 & +0 & \end{array}$$

(2)又 $\sin^4\theta+\cos^4\theta=(\sin^2\theta+\cos^2\theta)^2-2\sin^2\theta\cos^2\theta=1-2\cdot0=1$．

12.設 $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{5}$，$90°<\theta<180°$，則：



(1) $\cos\theta=$ ____________．　(2) $\tan\theta=$ ____________．

解答　(1) $-\dfrac{3}{5}$;(2) $-\dfrac{4}{3}$

解析　$\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{5}\Rightarrow\sin\theta=\dfrac{1}{5}-\cos\theta\Rightarrow\sin^2\theta=\dfrac{1}{25}-\dfrac{2}{5}\cos\theta+\cos^2\theta$

$\Rightarrow 1-\cos^2\theta=\dfrac{1}{25}-\dfrac{2}{5}\cos\theta+\cos^2\theta\Rightarrow 2\cos^2\theta-\dfrac{2}{5}\cos\theta-\dfrac{24}{25}=0$

$\Rightarrow 25\cos^2\theta-5\cos\theta-12=0\Rightarrow(5\cos\theta+3)(5\cos\theta-4)=0$

$\Rightarrow\cos\theta=-\dfrac{3}{5}$ 或 $\dfrac{4}{5}$，又 $90°<\theta<180°$，$\therefore\ \cos\theta=-\dfrac{3}{5}$，且 $\tan\theta=-\dfrac{4}{3}$．

13.設 $P(-5\sqrt{3},y)$ 在有向角 θ 的終邊上，若 $\tan\theta=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$，則：　(1) $y=$ _______．　(2) $\sin\theta=$ ________．

解答　(1)-10;(2)$-\dfrac{2}{\sqrt{7}}$

解析　$P(-5\sqrt{3},\ y)\ \Rightarrow\ \tan\theta=\dfrac{y}{-5\sqrt{3}}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\ \Rightarrow\ y=-10$，

又 $r=\overline{OP}=\sqrt{(-5\sqrt{3})^2+(-10)^2}=5\sqrt{7}$，

$\therefore\ \sin\theta=\dfrac{y}{r}=\dfrac{-10}{5\sqrt{7}}=-\dfrac{2}{\sqrt{7}}$．

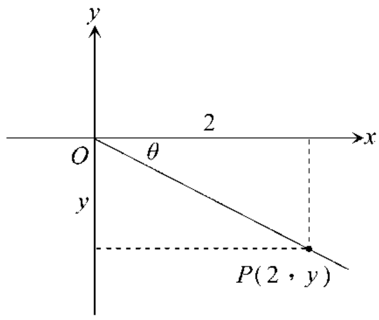
14.設 $P(-4k,3k)$，$k\neq0$ 為角 θ 終邊上之點，則：

(1) $\tan\theta=$ ________．　(2) $\dfrac{5\sin\theta+4\cos\theta}{2\sin\theta-\cos\theta}=$ ________．

解答　(1) $-\dfrac{3}{4}$;(2) $-\dfrac{1}{10}$

解析　(1) $\tan\theta=\dfrac{3k}{-4k}=-\dfrac{3}{4}$．　(2) 原式 $\overset{\text{同除}\cos\theta}{=\!=\!=}\dfrac{5\tan\theta+4}{2\tan\theta-1}=\dfrac{5\cdot(-\frac{3}{4})+4}{2\cdot(-\frac{3}{4})-1}=-\dfrac{1}{10}$．

15.已知 θ 角的頂點與原點重合，始邊落在 x 軸正向上，終邊通過點 $P(2，y)$，並知 θ 爲第四象限角，若 $\sin\theta=-\dfrac{1}{\sqrt{5}}$，則：



(1) y 的值爲____________．（恰有一解）

(2) $\tan(180°-\theta)+\sin(180°-\theta)+\sin(450°-\theta)$的值爲__________．

解答 (1) -1;(2) $-\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

解析 (1) θ 爲第四象限角，$P(2，y)$，$\therefore\ y<0$，

又 $\sin\theta=-\dfrac{1}{\sqrt{5}}=\dfrac{y}{OP}\ \Rightarrow\ -\dfrac{1}{\sqrt{5}}=\dfrac{y}{\sqrt{4+y^2}}$

$\Rightarrow\ -\sqrt{5}\,y=\sqrt{4+y^2}\ \Rightarrow\ 5y^2=4+y^2\Rightarrow\ y^2=1\ \Rightarrow\ y=\pm1$（1 不合），$\therefore\ y=-1$．

(2) $\sin\theta=-\dfrac{1}{\sqrt{5}}$，$\cos\theta=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$，$\tan\theta=\dfrac{-1}{2}$，

原式= $\tan(90°\times2-\theta)+\sin(90°\times2-\theta)+\sin(90°\times5-\theta)$

$=-\tan\theta+\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{\sqrt{5}}+\dfrac{2}{\sqrt{5}}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\sqrt{5}}$．

16.若 $270°<\theta<360°$且 $6\sin^2\theta-\sin\theta=1$，則 $\tan\theta=$____________．

解答 $-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

解析 $6\sin^2\theta-\sin\theta-1=0\Rightarrow(3\sin\theta+1)(2\sin\theta-1)=0\Rightarrow\sin\theta=-\dfrac{1}{3}$或$\dfrac{1}{2}$（不合）$\Rightarrow\tan\theta=-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$．

17.設 θ 爲一個第四象限角，$\tan\theta=-\dfrac{3}{4}$，求 $\dfrac{1+\sin\theta}{1-\cos\theta}$ =____________．

解答 2

解析 θ 在第四象限，且 $\tan\theta=-\dfrac{3}{4}\ \Rightarrow\ \sin\theta=\dfrac{-3}{5}$，$\cos\theta=\dfrac{4}{5}$，$\dfrac{1+\sin\theta}{1-\cos\theta}=\dfrac{1+(\frac{-3}{5})}{1-\frac{4}{5}}=\dfrac{\frac{2}{5}}{\frac{1}{5}}=2$．

18.設 $90°<\theta<135°$，則$\sqrt{1+2\sin\theta\cos\theta}-\sqrt{1-2\sin\theta\cos\theta}=$____________．

解答 $2\cos\theta$

解析 $90°<\theta<135°$，$\therefore\ \cos\theta<\sin\theta$ 且 $\sin\theta+\cos\theta>0$，

原式=$\sqrt{(\sin\theta+\cos\theta)^2}-\sqrt{(\sin\theta-\cos\theta)^2}=|\sin\theta+\cos\theta|-|\sin\theta-\cos\theta|$

$=\sin\theta+\cos\theta-(\sin\theta-\cos\theta)=2\cos\theta$．

19.設 $S=\{\theta_n\,|\,\theta_n=45°\times n,\ n\in\mathbb{Z},\ 1\le n\le100\}$，則 S 中有____________個角爲第二象限角．

解答 13

解析 第二象限角 $90°+360°\times t<\theta_n=45°\times n<180°+360°\times t$，$t\in\mathbb{Z}$，

$\therefore\ 2+8t<n<4+8t$，$t\in\mathbb{Z}$，

故 $n=8t+3$，$t\in\mathbb{Z}$，又 $1\le n=8t+3\le 100 \quad\Rightarrow\quad -2\le 8t\le 97 \quad\Rightarrow\quad -\frac{1}{4}\le t\le\frac{97}{8}$，$t\in\mathbb{Z}$，

$\therefore\ \ t=0$，1，2，⋯，12，共 13 個，$\therefore$ S 中有 13 個角爲第二象限角．

20.$(\log_2\sin 855°)^2+\log_3\tan(-510°)$之值爲＿＿＿＿＿＿．

解答 $-\frac{1}{4}$

解析 $(\log_2\sin 855°)^2+\log_3\tan(-510°)=(\log_2\cos 45°)^2+\log_3\tan 30°=(\log_2\sin 45°)^2+\log_3\tan 30°$

$$=(\log_2\frac{1}{\sqrt{2}})^2+\log_3\frac{1}{\sqrt{3}}=(\log_2 2^{-\frac{1}{2}})^2+\log_3 3^{-\frac{1}{2}}$$

$$=(-\frac{1}{2})^2+(-\frac{1}{2})=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}\ .$$

21.設 $\sin(-80°)=k$，若以 k 表函數值，則：(1) $\tan(-80°)=$＿＿＿＿＿＿．　(2) $\cos 280°=$＿＿＿＿＿＿．

解答 (1) $\frac{k}{\sqrt{1-k^2}}$;(2) $\sqrt{1-k^2}$

解析 (1) $\sin(-80°)=k - \sin 80°=k\Rightarrow\sin 80°=\frac{-k}{1}$，鄰邊 $\sqrt{1-k^2}$

$$\tan(-80°)=-\tan 80°=\frac{k}{\sqrt{1-k^2}}\ .$$

(2) $\cos 280°=\cos(360°-80°)=\cos(80°)=\frac{\sqrt{1-k^2}}{1}=\sqrt{1-k^2}$ ．

22.$\sin 1590°\cdot\cos(-1860°)-\cos 225°\cdot\sin 315°+\tan 300°\cdot\cos 180°=$＿＿＿＿＿．

解答 $\sqrt{3}-\frac{1}{4}$

解析 原式$=\sin 1590°\cdot\cos 1860°-\cos 225°\cdot\sin 315°+\tan 300°\cdot\cos 180°$

$=\sin(17\cdot 90°+60°)\cdot\cos(20\cdot 90°+60°)-\cos(2\cdot 90°+45°)\cdot\sin(3\cdot 90°+45°)$

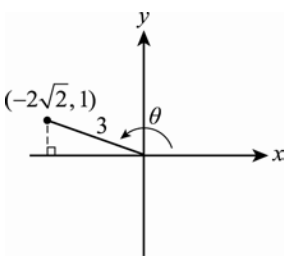
$+\tan(3\cdot 90°+30°)\cdot\cos 180°$

$=\cos 60°\cdot\cos 60°-(-\cos 45°)\cdot(-\cos 45°)+(-\cot 30°)\cdot(-1)$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}-(-\frac{1}{\sqrt{2}})\cdot(-\frac{1}{\sqrt{2}})+\sqrt{3}=\sqrt{3}-\frac{1}{4}$ ．

23.設 $\sin\theta=\frac{1}{3}$，$90°<\theta<180°$，(1) $\tan(-540°+\theta)=$＿＿＿＿＿．　(2) $\cos(\theta-450°)=$＿＿＿＿＿＿．

解答 (1) $-\frac{\sqrt{2}}{4}$;(2) $\frac{1}{3}$



解析 $\sin\theta=\frac{1}{3}$ 且 $90°<\theta<180°$

$\Rightarrow r=3,\ y=1,\ x=-\sqrt{3^2-1^2}=-\sqrt{8}=-2\sqrt{2}$，

$\therefore\ \ \tan\theta=\frac{1}{-2\sqrt{2}}$ ．

(1) $\tan(-540°+\theta)=-\tan(540°-\theta)=-\tan(6\cdot 90°-\theta)=\tan\theta=\dfrac{1}{-2\sqrt{2}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

(2) $\cos(\theta-450°)=\cos(450°-\theta)=\cos(5\cdot 90°-\theta)=\sin\theta=\dfrac{1}{3}$.

24.化簡 $\dfrac{\sin(180°-\theta)}{\sin(\theta-360°)}-\dfrac{\tan(180°-\theta)}{\tan(180°+\theta)}-\dfrac{\sin(\theta-270°)}{\cos(\theta-180°)}=$____________ .

解答 3

解析 原式 $=\dfrac{\sin(90°\times2-\theta)}{-\sin(90°\times4-\theta)}-\dfrac{\tan(90°\times2-\theta)}{\tan(90°\times2+\theta)}-\dfrac{-\sin(90°\times3-\theta)}{\cos(90°\times2-\theta)}$

$=\dfrac{\sin\theta}{\sin\theta}-\dfrac{-\tan\theta}{\tan\theta}-\dfrac{\cos\theta}{-\cos\theta}=1+1+1=3$.

25.若方程式 $\sin^2x+2\cos x+k=0$ 有解，則 k 的範圍爲____________ .

解答 $-2\le k\le 2$

解析 $k=-\sin^2x-2\cos x=-(1-\cos^2x)-2\cos x=\cos^2x-2\cos x-1=(\cos x-1)^2-2$ ⇐配方

$\because\ -1\le\cos x\le 1$，$\therefore\ -2\le\cos x-1\le 0\Rightarrow 0\le(\cos x-1)^2\le 4$,

$\therefore\ -2\le(\cos x-1)^2-2\le 2$，即 $-2\le k\le 2$.

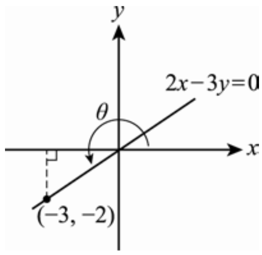
26.角 θ 位於標準位置，若 $P(x, y)$爲角 θ 終邊上一點，$\tan\theta=-3$，則 $\dfrac{2x^2-5xy-y^2}{x^2+xy+2y^2}=$____________ .

解答 $\dfrac{1}{2}$

解析 $\because\ \tan\theta=\dfrac{y}{x}=-3$，$\therefore\ y=-3x\ \Rightarrow$ 求值式 $=\dfrac{2x^2-5x\cdot(-3x)-(-3x)^2}{x^2+x\cdot(-3x)+2(-3x)^2}=\dfrac{8x^2}{16x^2}=\dfrac{1}{2}$.

27.設 θ 位於標準位置，其終邊在直線 $2x-3y=0$ 上，且 $\sin\theta\times\tan\theta<0$，則 $\sin\theta-\cos\theta=$____________.

解答 $\dfrac{\sqrt{13}}{13}$



解析 設 $P(x, y)\in L$：$2x-3y=0\Rightarrow 2x=3y$，$\therefore\ \tan\theta=\dfrac{y}{x}=\dfrac{2}{3}$，

又 $\sin\theta\times\tan\theta<0$，$\therefore\ \theta$ 爲第三象限角

$\Rightarrow\sin\theta=\dfrac{-2}{\sqrt{13}}$，$\cos\theta=\dfrac{-3}{\sqrt{13}}\Rightarrow\sin\theta-\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{13}}=\dfrac{\sqrt{13}}{13}$.

28.設 θ 爲第三象限角，且 $2\cos^2\theta-3\sin\theta\cos\theta-3\sin^2\theta=1$，則 $\tan\theta=$____________ .

解答 $\dfrac{1}{4}$

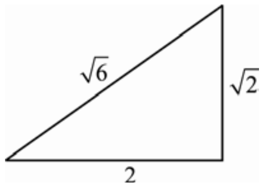
解析 原式 $\Rightarrow 2\cos^2\theta-3\sin\theta\cos\theta-3\sin^2\theta=\sin^2\theta+\cos^2\theta$

$\Rightarrow 4\sin^2\theta+3\sin\theta\cos\theta-\cos^2\theta=0$，左右同除 $\cos^2\theta\ 4(\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta})^2+3(\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta})-1=0$

$\Rightarrow 4\tan^2\theta+3\tan\theta-1=0\ \Rightarrow(4\tan\theta-1)(\tan\theta+1)=0\Rightarrow\ \tan\theta=\dfrac{1}{4}$ 或 -1,

又 θ 爲第三象限角，$\therefore\tan\theta>0\ \Rightarrow\ \tan\theta=\dfrac{1}{4}$.

29.已知$\dfrac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}=3+2\sqrt{2}$，則 $\sin\theta=$____________.



解答 $\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

解析 原式 $\Rightarrow 1+\tan\theta=(3+2\sqrt{2})-(3+2\sqrt{2})\tan\theta$

$\Rightarrow (4+2\sqrt{2})\tan\theta=2+2\sqrt{2} \Rightarrow \tan\theta=\dfrac{2+2\sqrt{2}}{4+2\sqrt{2}}=\dfrac{(2+2\sqrt{2})(4-2\sqrt{2})}{4^2-(2\sqrt{2})^2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}>0$,

$\therefore$ θ 爲第一或三象限角 $\Rightarrow \sin\theta=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

30.已知 $180°<\theta<270°$，且 $8\sin^2\theta-2\sin\theta-3=0$，則 $\theta=$____________.

解答 210°

解析 $8\sin^2\theta-2\sin\theta-3=0 \Rightarrow (4\sin\theta-3)(2\sin\theta+1)=0$,

$\therefore$ $\sin\theta=\dfrac{3}{4}$或$-\dfrac{1}{2}$，又 $180°<\theta<270°$，$\therefore$ $\sin\theta<0\Rightarrow\sin\theta=-\dfrac{1}{2}$，$\therefore$ $\theta=210°$.

31.若 θ 爲第二象限角，則$\dfrac{\theta}{3}$不可能在第____________象限.

解答 三

解析 $\because$ θ 爲第二象限角，$\therefore$ $90°+n\times360°<\theta<180°+n\times360°$，$n\in\mathbb{Z}$

$\Rightarrow 30°+n\times120°<\dfrac{\theta}{3}<60°+n\times120°$，$n\in\mathbb{Z}$,

① $n=3k$ 時 $\Rightarrow 30°+k\times360°<\dfrac{\theta}{3}<60°+k\times360°$，$k\in\mathbb{Z}$， $\therefore$ $\dfrac{\theta}{3}$爲第一象限角；

② $n=3k+1$時 $\Rightarrow 150°+k\times360°<\dfrac{\theta}{3}<180°+k\times360°, k\in\mathbb{Z}$， $\therefore$ $\dfrac{\theta}{3}$爲第二象限角；

③ $n=3k+2$ 時 $\Rightarrow 270°+k\times360°<\dfrac{\theta}{3}<300°+k\times360°, k\in\mathbb{Z}$， $\therefore$ $\dfrac{\theta}{3}$爲第四象限角，

由①②③知：$\dfrac{\theta}{3}$不可能在第三象限角.