高雄市明誠中學　高二普通科　數學平時測驗　日期：91.10.30							
範圍	2-3 空間向量的座標表示法	班級 座號		姓名		得分	

一、選擇題：

1.(CD　)在下列五組中，何者可能是空間向量的方向角？
(A)$-(\pi/4)$，$\pi/3$，$\pi/3$　(B)$\pi/6$，$\pi/4$，$\pi/3$　(C)30°，90°，60°　(D)45°，60°，60°　(E)$\pi/4$，$\pi/3$，$4\pi/3$。(複選)

2.(AB　)$\vec{a}=(-3，0，0)$，則$\vec{a}$之方向角為　(A)π　(B)$\pi/2$　(C)$\pi/3$　(D)$\pi/4$　(E)$(2/3)\pi$。(複選)

3.(DE　)設A（2，6，3），B（2，2，－1），點C在直線AB上，且$\overline{AC}:\overline{BC}=3:1$，則點C之坐標為　(A)（2，0，3）　(B)（－2，3，0）
(C)（0，2，3）　(D)（2，3，0）　(E)（2，0，－3）。(複選)

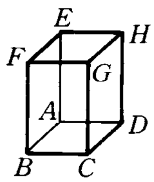
4.(B　)設$\overrightarrow{OA}=(1，2，2)$，$\overrightarrow{OB}=(1，1，0)$，則$\overrightarrow{OA}$與$\overrightarrow{OB}$之夾角為
(A)30°　(B)45°　(C)60°　(D)120°。

5.(C　)若$\vec{a}=(2，-1，1)$與$\vec{b}=(1，1，2)$，則$\vec{a}\cdot\vec{b}=$　(A)1　(B)2　(C)3　(D)4。

6.(A　)ABCD－EFGH為正立方體，則$\overrightarrow{HB}$與$\overrightarrow{EG}$之交角為　(A)90° (B)45°　(C)135°　(D)180°。

7.(C　)設x，y，z為實數，且$3x-2y+2z=4\sqrt{7}$，則$x^2+4y^2+z^2$之最小值為　(A)3　(B)5　(C)8　(D)11。

8.(D　)如下圖為長方體，長，寬，高各為5，3，4單位長，$\overline{AB}=3$，$\overline{AD}=5$，$\overrightarrow{BH}$與$\overrightarrow{CE}$的夾角為θ，則cosθ＝　(A)4／5　(B)3／5　(C)1　(D)0。



二、填充題：

1.設A（2，1，－2），若$\overrightarrow{AB}$的方向角為$\pi/4$，$2\pi/3$，$\pi/3$，且$|\overrightarrow{AB}|=6$，則點B的坐標為【$(2+3\sqrt{2}，-2，1)$　】。

2.設P（a，b，c）為空間中之點，且$\overrightarrow{OP}$之方向角為α，β，γ，則：
(1)$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=$【　1　】。(2)$\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=$【　2　】。
(3)$\cos2\alpha+\cos2\beta+\cos2\gamma=$【　-1　】。

解析：(1)設P點坐標為（a，b，c）$\Rightarrow\overrightarrow{OP}=(a，b，c)$
$\Rightarrow|\overrightarrow{OP}|=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$
$\overrightarrow{OP}=(|\overrightarrow{OP}|\cos\alpha，|\overrightarrow{OP}|\cos\beta，|\overrightarrow{OP}|\cos\gamma)$
$=(a，b，c)$
$\Rightarrow\cos\alpha=\dfrac{a}{|\overrightarrow{OP}|}$，$\cos\beta=\dfrac{b}{|\overrightarrow{OP}|}$，$\cos\gamma=\dfrac{c}{|\overrightarrow{OP}|}$
$\Rightarrow\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=\dfrac{a^2}{|\overrightarrow{OP}|^2}+\dfrac{b^2}{|\overrightarrow{OP}|^2}+\dfrac{c^2}{|\overrightarrow{OP}|^2}$

$=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{|\overrightarrow{OP}|^2}=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{a^2+b^2+c^2}=1$

(2)$\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma$

$=(1-\cos^2\alpha)+(1-\cos^2\beta)+(1-\cos^2\gamma)$

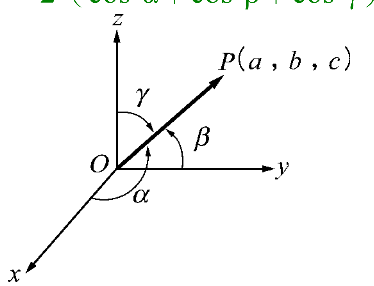
$=3-(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma)$

$=2$

(3)$\cos2\alpha+\cos2\beta+\cos2\gamma$

$=(2\cos^2\alpha-1)+(2\cos^2\beta-1)+(2\cos^2\gamma-1)$

$=2(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma)-3=-1$



3.設A（2，1，－2），B（$2+3\sqrt{2}$，－2，1）為空間中之兩點，試求：

(1)$\overrightarrow{AB}$=【 （$3\sqrt{2}$，－3，3） 】。 (2)｜$\overline{AB}$｜＝【 6 】。

(3)$\overrightarrow{AB}$之方向餘弦為【 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$-\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{1}{2}$ 】。

(4)$\overrightarrow{AB}$之方向角為【 $\dfrac{\pi}{4}$，$\dfrac{2\pi}{3}$，$\dfrac{\pi}{3}$ 】。

4.兩向量$\vec{a}$=（1，－2，3），$\vec{b}$=（－1，1，－1），當t=【 2 】，｜$\vec{a}+t\vec{b}$｜有最小值，其值為【 $\sqrt{2}$ 】。

5.設A（1，2，3），B（4，3，－1），C（2，－1，5），若ABCD為平行四邊形，則D的坐標為【 （－1，－2，9） 】。

6.空間中有一質點作等速直線運動，設t表時間，當t=0時，它的位置在（－1，0，3），當t=1時，它的位置在（3，－1，5），則當t=3時，該質點的位置在【 （11，－3，9） 】。

7.設A（a，－3，2），B（2，－2，b），C（6，－1，4）三點共線，則a=【 －2 】，b=【 3 】。

8.若A（3，－1，2），B（5，3，－4），點P在直線AB上，且2$\overline{AP}$=3$\overline{AB}$，則點P之坐標為【 （6，5，－7）或（0，－7，11） 】。

9.設A（4，1，3），B（6，3，4），C（4，5，6），在△ABC中，若：

(1)∠A之角平分線交$\overline{BC}$於D，則D點之坐標為【 （$\dfrac{21}{4}$，$\dfrac{15}{4}$，$\dfrac{19}{4}$） 】。

(2)∠A之外角平分線交$\overleftrightarrow{BC}$於E，則E點之坐標為【 （9，0，1） 】。

10.設$\vec{a}$=（1，2，3），$\vec{b}$=（k，k－2，k），若$\vec{a}-\vec{b}$與$\vec{a}$互相垂直，則k之值為【 3 】。

11.設$\vec{X}$=（2，3，5），$\vec{Y}$=（－4，a，－10b），若$\vec{X}$//$\vec{Y}$，則a=【 －6 】，b=【 1 】。

12. 設$\vec{a}$=（4，－1，3），$\vec{b}$=（－2，1，－2），一單位向量$\vec{u}$滿足$\vec{u}\perp\vec{a}$且$\vec{u}\perp\vec{b}$，則$\vec{u}$=【 （$\dfrac{1}{3}$，$-\dfrac{2}{3}$，$-\dfrac{2}{3}$）或（$-\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{2}{3}$，$\dfrac{2}{3}$） 】。

13.已知空間中三點A（1，2，3），B（2，4，5），C（3，4，3），若$\overrightarrow{AB}$與$\overrightarrow{AC}$之夾角爲θ，則：

(1)$\sin\theta=$ (A)$1/\sqrt{2}$ (B)$1/\sqrt{3}$ (C)$1/2$ (D)$1/3$ (E)$2/3$。答：【 (A) 】。

(2)△ABC之面積爲 (A)$\sqrt{3}/2$ (B)$\sqrt{3}/3$ (C)$\sqrt{3}$ (D)3 (E)$3/2$。答：【 (D) 】。

14.設$\vec{a}=(2,-1,1)$，$\vec{b}=(-2,3,1)$，試求：

(1)$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=$【 -8 】。

(2)$(2\vec{a}-3\vec{b})\cdot(\vec{a}+2\vec{b})=$【 -78 】。

15.△ABC中之三頂點爲A（2，−3，4），B（3，−4，4），C（2，−2，3），則∠A之弧度量爲【 $\frac{2\pi}{3}$ 】。

16. $\vec{a}=(-2,4,0)$，$\vec{b}=(1,2,-1)$，則$\vec{a}$在$\vec{b}$上的正射影向量爲【 （1，2，−1） 】。

17.設A（2，0，0），B（0，2，0），C（0，0，1），令∠ACB之弳度量爲θ，則sinθ=【 $\frac{2\sqrt{6}}{5}$ 】，△ABC之面積爲【 $\sqrt{6}$ 】。

18.設A（1，−2，0），B（−1，0，1），C（1，2，−3），則△ABC之面積爲【 $5\sqrt{2}$ 】。

19.設x>0，y>0，z>0，$\vec{a}=(\sqrt{x},\sqrt{y},\sqrt{z})$，$\vec{b}=(1/\sqrt{x},2/\sqrt{y},3/\sqrt{z})$，且x+y+z=12，試求：

(1)（1/x）+（4/y）+（9/z）的最小值爲【 3 】。

(2)此時的$\vec{a}$爲【 $(\sqrt{2},2,\sqrt{6})$ 】。

20.空間中有兩向量$\vec{a}=(1,2,3)$，$\vec{b}=(x,y,z)$，已知$x^2+y^2+z^2=56$，則$\vec{a}\cdot\vec{b}$的最大值爲【 28 】，此時$\vec{b}=$【 （2，4，6） 】。

21.空間中有兩點A（5，−3，3），B（3，1，1），若直線AB交xy平面於P，交yz平面於Q，則P之坐標爲【 （2，3，0） 】，則Q之坐標爲【 （0，7，−2） 】。

22.設P（2，−1，−4），A（1，0，3），則點P對於點A的對稱點Q的坐標爲【 （0，1，100 ） 】。

23.空間中，設O爲原點，$\overrightarrow{OA}=(2,1,0)$，$\overrightarrow{OB}=(0,2,1)$，$\overrightarrow{OC}=(1,0,2)$，則：

(1)∠ABC=【 60 】度。 (2)△ABC之面積爲【 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ 】。

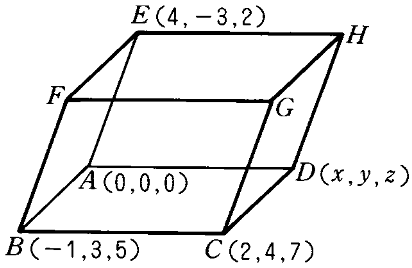
24. 設A（1，2，3），B（2，1，2），C（−1，3，4），A在直線BC上之投影爲P，若$\overrightarrow{BP}=t\overrightarrow{BC}$，則t=【 $\frac{7}{17}$ 】。

25.空間中兩向量$|\vec{a}|=5$，$|\vec{b}|=2$，$\vec{a}$與$\vec{b}$之夾角爲60°，則：

(1)$|\vec{a}-\vec{b}|=$【 $\sqrt{19}$ 】。

(2)$\vec{a}+\vec{b}$與$\vec{a}-\vec{b}$所圍三角形的面積爲【 $5\sqrt{3}$ 】。

26.如下圖爲一平行六面體，則H之坐標爲【 （7，−2，4） 】。



27.設△OAB中，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$，試證△OAB面積為
$\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2\cdot|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{(a_1b_2-a_2b_1)^2+(a_2b_3-a_3b_2)^2-(a_3b_1-a_1b_3)^2}$。

【證明】

設兩向量$\vec{a}$與$\vec{b}$的夾角為θ

△OAB面積為$\frac{1}{2}|\vec{a}|\ |\vec{b}|\sin\theta$　$\because \cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\ |\vec{b}|}$

$\therefore \sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\frac{(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}{|\vec{a}|^2\ |\vec{b}|^2}}=\frac{\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\vec{b})^2}}{|\vec{a}|\ \ |\vec{b}|}=$

故得△OAB面積為$\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2\ |\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$

又$\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$

$\therefore |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2$

$=(a_1^2+a_2^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)-(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2$

$=a_1^2b_2^2+a_1^2b_3^2+a_2^2b_1^2+a_2^2b_3^2+a_3^2b_1^2+a_3^2b_2^2-2a_1a_2b_1b_2-2a_1a_3b_1b_3-2a_2a_3b_2b_3$

$=(a_1b_2-a_2b_1)^2+(a_2b_3-a_3b_2)^2+(a_3b_1-a_1b_3)^2$

故得△OAB面積為$\frac{1}{2}\sqrt{(a_1b_2-a_2b_1)^2+(a_2b_3-a_3b_2-a_3b_2)^2+(a_3b_1-a_1b_3)^2}$