高雄市明誠中學 高一數學平時測驗 日期：92.06.02					
範圍	3-3 倍角、半角公式 +Ans	班級		姓名	
		座號			

一. 填充題 (每題 10 分)

1、(D) 以 $x-2\cos 20^\circ$ 除 x^3-3x+3 的餘數爲 (A)2 (B) $\frac{7}{2}$ (C) $\frac{3+\sqrt{3}}{2}$ (D)4 (E) $3+\sqrt{3}$

解析：餘數爲 $(2\cos 20^\circ)^3-3(2\cos 20^\circ)+3=2(4\cos^3 20^\circ-3\cos 20^\circ)+3=4$

3、(D) $\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}$ 可化爲下列何者 (A) $\cos\theta+\cot\theta$ (B) $\tan\frac{\theta}{2}$ (C) $\cot\frac{\theta}{2}$ (D) $\tan(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2})$ (E) $\tan(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2})$

解析：$\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}=\frac{\sin(\frac{\pi}{2}-\theta)}{1+\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)}=\tan(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2})$

5、(B) 設 $\tan\theta=t$，其中 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$，則 (A) $\sin 2\theta=\frac{2t}{1-t^2}$ (B) $\cos 2\theta=\frac{1-t^2}{1+t^2}$ (C) $\tan 2\theta=\frac{1-t^2}{1+t^2}$ (D) $\cot 2\theta=\frac{1+t^2}{2t}$ (E) $\tan\theta-\cot\theta=\frac{t}{1-t}$

6、(B) 整理化簡 $\sin^4\frac{\pi}{8}+\sin^4\frac{3\pi}{8}+\sin^4\frac{5\pi}{8}+\sin^4\frac{7\pi}{8}$，可得値爲 (A) $\frac{5}{4}$ (B) $\frac{3}{2}$ (C) $\frac{7}{4}$ (D)2 (E) $\frac{31}{16}$

解析：$\sin^4\frac{\pi}{8}=\sin^4\frac{7\pi}{8}$，$\sin^4\frac{3\pi}{8}=\sin^4\frac{5\pi}{8}=\cos^4\frac{\pi}{8}$

$\therefore 2(\sin^4\frac{\pi}{8}+\cos^4\frac{\pi}{8})=2(\sin^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{\pi}{8})^2-4\sin^2\frac{\pi}{8}\cos^2\frac{\pi}{8}=2-(\sin\frac{\pi}{4})^2=\frac{3}{2}$

7、(B) 設 $\cos 2x=t$，則 $\sin^4 x-\cos^4 x$ 以 t 表示之，爲下列那一個多項式？ (A) t (B) $-t$ (C) t^2 (D) $-t^2$ (E) $\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{2}$

解析：$\sin^4 x-\cos^4 x=(\sin^2 x-\cos^2 x)(\sin^2 x+\cos^2 x)=-\cos 2x=-t$

二. 填充題 (每題 10 分)

1、設 θ 爲第三象限角 $\cos 2\theta=\frac{4}{5}$，則 $\sin\theta=$______，$\tan\frac{\theta}{2}=$______。

答案：$-\frac{1}{\sqrt{10}}$，$-(3+\sqrt{10})$

解析：$\sin\theta=\pm\sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{2}}=-\frac{1}{\sqrt{10}}$ （因 $\theta\in$ Ⅲ 故取負值）

同理 $\cos\theta=-\frac{3}{\sqrt{10}}$ $\therefore\tan\frac{\theta}{2}=-(3+\sqrt{10})$

2、求 $\cos 80^\circ\cdot\cos 60^\circ\cdot\cos 40^\circ\cdot\cos 20^\circ$ 之値 = ______。

答案：$\frac{1}{16}$

解析：$\cos 60° = \frac{1}{2}$

$\cos 20° \cdot \cos 40° \cdot \cos 80° = \frac{8 \cdot \sin 20° \cos 20° \cdot \cos 40° \cdot \cos 80°}{8\sin 20°} = \frac{\sin 160°}{8\sin 20°} = \frac{1}{8}$

故$\cos 80° \cdot \cos 60° \cdot \cos 40° \cdot \cos 20° = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{16}$

3、設$5\cos\theta + \cos\frac{\theta}{2} + 2 = 0$，則$\cos\frac{\theta}{2} =$______ 或 ______。

答案：$\frac{1}{2}$，$-\frac{3}{5}$

解析：令$\cos\frac{\theta}{2} = t$，則$5(2t^2 - 1) + t + 2 = 0$，$(2t-1)(5t+3) = 0$ $\therefore \cos\frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}$ 或 $-\frac{3}{5}$

4、設$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$，若$\sin\theta = \frac{5}{13}$，則$\sin 2\theta =$______，$\tan 2\theta =$______，$\cos\frac{\theta}{2} =$______，$\tan\frac{\theta}{2} =$______。

答案：$-\frac{120}{169}$，$\frac{-120}{119}$，$\frac{1}{\sqrt{26}}$，5

解析：$\because \sin\theta = \frac{5}{13}$，$\therefore \cos\theta = -\frac{12}{13}$，$\sin 2\theta = -\frac{120}{169}$，$\tan\theta = -\frac{5}{12}$ $\tan 2\theta = \frac{-120}{119}$

$\because \frac{\pi}{4} < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{2}$ $\therefore \cos\frac{\theta}{2} = +\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} = \frac{1}{\sqrt{26}}$，$\tan\frac{\theta}{2} = 5$

5、設方程式$x^2 - px + q = 0$之二根爲$\sin\theta$，$\cos\theta$，則$2\cos^2\frac{\theta}{2}(\sin\frac{\theta}{2} + \cos\frac{\theta}{2})^2$以$p, q$表示爲______。

答案：$\sin 55° - \cos 95° - \sin 115° =$

解析：$\because \sin\theta + \cos\theta = p$，$\sin\theta \cdot \cos\theta = q$

$\therefore 2\cos^2\frac{\theta}{2}(\sin\frac{\theta}{2} + \cos\frac{\theta}{2})^2 = (1+\cos\theta)(1+\sin\theta) = 1 + p + q$

7、(1) $\cos\frac{11}{8}\pi =$______。 (2) $\cos^2\frac{9}{8}\pi + \cos^2\frac{11\pi}{8} =$______。

答案：(1) $-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ (2) 1

解析：(1) $\cos\frac{11}{8}\pi = -\sqrt{\frac{1+\cos\frac{11}{4}\pi}{2}} = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

(2) $\cos^2\frac{9}{8}\pi + \cos^2\frac{11\pi}{8} = (\frac{1+\cos\frac{9}{4}\pi}{2}) + (\frac{1+\cos\frac{11}{4}\pi}{2}) = 1$

9、設$\frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi$，試化簡$\sqrt{1-\cos\theta} - \sqrt{1+\cos\theta} =$______。(以$\frac{\theta}{2}$角之三角函數表示之)

答案：$\sqrt{2}\sin\frac{\theta}{2} + \sqrt{2}\cos\frac{\theta}{2}$

解析：$\sqrt{1-\cos\theta}=\sqrt{2}\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|$，$\sqrt{1+\cos\theta}=\sqrt{2}\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|$

$\frac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$ $\quad\therefore\frac{3}{4}\pi<\frac{\theta}{2}<\pi$ $\quad\therefore\sin\frac{\theta}{2}>0$，$\cos\frac{\theta}{2}<0$

$\therefore\sqrt{1-\cos\theta}+\sqrt{1+\cos\theta}=\sqrt{2}\sin\frac{\theta}{2}+\sqrt{2}\cos\frac{\theta}{2}$

10、設$\sin\theta-\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$，$0\le\theta\le 2\pi$，則$\sin 2\theta=$______，又$\theta=$______ 或 ______。

答案：$\frac{1}{2}$ ，$75°$ ，$195°$

解析：$\because\sin\theta-\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\quad\therefore\sin 2\theta=\frac{1}{2}$ $\qquad\because 0\le\theta\le 2\pi$ $\quad\therefore 0\le 2\theta\le 4\pi$

故$2\theta=30°,150°,390°,510°$，$\theta=15°,75°,195°,255°$

但 $\because\sin\theta-\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}>0$ $\quad\therefore\theta=75°$ 或 $195°$ （$75°=\frac{5\pi}{12}$ ，$195°=\frac{13\pi}{12}$）

11、設θ在第一象限且$5\sin 2\theta+3\tan 2\theta=8$，則$\tan\theta=$______，又$\cos 2\theta=$______。

答案：$\frac{1}{2}$，$\frac{3}{5}$

解析：設$\tan\theta=t$，則$\sin 2\theta=\frac{2t}{1+t^2}$，$\tan 2\theta=\frac{2t}{1-t^2}$

故$5(\frac{2t}{1+t^2})+3(\frac{2t}{1-t^2})=8$，$4t^4-2t^3+8t-4=0$，$(2t-1)(t^3+2)=0$

又$t>0$ $\quad\therefore t=\frac{1}{2}$，$\cos 2\theta=\frac{1-t^2}{1+t^2}=\frac{3}{5}$

14、$\sin^4\frac{\pi}{16}+\sin^4\frac{3\pi}{16}+\sin^4\frac{5\pi}{16}+\sin^4\frac{7\pi}{16}=$______。

答案：$\frac{3}{2}$

解析：$\because\sin^4\frac{7\pi}{16}=\cos^4\frac{\pi}{16}$，$\sin^4\frac{5\pi}{16}=\cos^4\frac{3\pi}{16}$

$\therefore\sin^4\frac{\pi}{16}+\cos^4\frac{\pi}{16}=1-2\sin^2\frac{\pi}{16}\cos^2\frac{\pi}{16}=1-\frac{1}{2}\sin^2\frac{\pi}{8}$

同理 $\sin^4\frac{3\pi}{16}+\cos^4\frac{3\pi}{16}=1-\frac{1}{2}\sin^2\frac{3\pi}{8}$

$\therefore\sin^4\frac{\pi}{16}+\sin^4\frac{3\pi}{16}+\sin^4\frac{5\pi}{16}+\sin^4\frac{7\pi}{16}=2-\frac{1}{2}(\sin^2\frac{\pi}{8}+\sin^2\frac{3\pi}{8})=\frac{3}{2}$

16、計算$\tan 37.5°+\cot 37.5°=$______。

答案：$2(\sqrt{6}-\sqrt{2})$

解析：$\tan 37.5°+\cot 37.5°=\frac{1}{\sin 37.5°\cdot\cos 37.5°}=\frac{2}{\sin 75°}=2(\sqrt{6}-\sqrt{2})$

17、設$\cos 2\theta=\frac{1}{3}$，則$\frac{\cos 3\theta}{\cos\theta}+\frac{\sin 3\theta}{\sin\theta}=$______。

答案：$\frac{4}{3}$

解析：

$$\frac{\cos 3\theta}{\cos\theta}+\frac{\sin 3\theta}{\sin\theta}=(4\cos^2\theta-3)+(3-4\sin^2\theta)=2(1+\cos 2\theta)-2(1-\cos 2\theta)$$
$$=4\cos 2\theta=\frac{4}{3}$$

19、 $\cos\theta+3\sin\frac{\theta}{2}=2$，則$\cos\theta=$______ 或 ______。

答案：$\frac{1}{2},-1$

解析：令$\sin\frac{\theta}{2}=t$，則$1-2t^2+3t=2$，$\therefore t=\frac{1}{2}$ 或 1

當$\sin\frac{\theta}{2}=\frac{1}{2}$，$\cos\theta=\frac{1}{2}$，當$\sin\frac{\theta}{2}=1$，$\cos\theta=-1$

21、設$\sin\theta=\frac{3}{5}$，則$\cos 2\theta=$______，$\cos 4\theta=$______。

答案：$\frac{7}{25}$，$\frac{-527}{625}$

解析：$\sin\theta=\frac{3}{5}$ $\therefore \cos 2\theta=1-2(\frac{3}{5})^2=\frac{7}{25}$，$\cos 4\theta=2(\frac{7}{25})^2-1=\frac{-527}{625}$

23、設$\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$且$0<\theta<\pi$，則$\sin 2\theta=$______，又$\theta=$______。

答案：$-\frac{1}{2}$，$105°$

解析：$\because (\sin\theta+\cos\theta)^2=\frac{1}{2}$， $\therefore \sin 2\theta=-\frac{1}{2}$ $\because =\sin(60°)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\therefore 2\theta=210°$ 或 $330°$

但$\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}>0$ ，故$2\theta=210°$，$\theta=105°$ （$\theta=165°$不合）

三. 計算與證明題 (每題 10 分)

1、設$\pi<\theta<\frac{3\pi}{2}$，化簡$\sqrt{1-\sin\theta}-\sqrt{1+\sin\theta}$。

答案：由$\pi<\theta<\frac{3\pi}{2}$得$\frac{\pi}{2}<\frac{\theta}{2}<\frac{3\pi}{4}$，可知$\sin\frac{\theta}{2}>0>\cos\frac{\theta}{2}$且$\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|>\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|$，而有

$\sin\frac{\theta}{2}-\cos\frac{\theta}{2}>0$，$\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}>0$

故 $\sqrt{1-\sin\theta}-\sqrt{1+\sin\theta}=\sqrt{(\sin\frac{\theta}{2}-\cos\frac{\theta}{2})^2}-\sqrt{(\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2})^2}$

$=(\sin\frac{\theta}{2}-\cos\frac{\theta}{2})-(\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2})=-2\cos\frac{\theta}{2}$

2、設$f(x)=\sin^4 x+\cos^4 x$，則$f(x)$之最大值爲何？最小值爲何？

答案：$f(x)=\sin^4 x+\cos^4 x=1-2\sin^2 x\cos^2 x$

$$=\frac{1+\cos 40°}{2}+\frac{1+\cos 80°}{2}-(\frac{\cos 30°+\cos 20°}{2})$$

$\because -1\le\cos 4x\le 1$ $\therefore \frac{1}{2}\le f(x)\le 1$ 故最大值爲1，最小值爲$\frac{1}{2}$。

7、設方程式$x^2+px+q=0$之二根爲$\sin\theta,\ \cos\theta$，試以p,q表下列二式：

(1) $2\sin^2\frac{\theta}{2}(\sin\frac{\theta}{2}-\cos\frac{\theta}{2})^2$　　(2) $2\cos^2\frac{\theta}{2}(\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2})^2$

答案：(1) 由$x^2+px+q=0$之二根爲$\sin\theta,\ \cos\theta$知

$$f(x)=x^2+px+q=(x-\sin\theta)(x-\cos\theta)$$

又　$2\sin^2\frac{\theta}{2}=1-(1-2\sin^2\frac{\theta}{2})=1-\cos\theta$

$(\sin\frac{\theta}{2}-\cos\frac{\theta}{2})^2=1-2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}=1-\sin\theta$

得　$2\sin^2\frac{\theta}{2}(\sin\frac{\theta}{2}-\cos\frac{\theta}{2})^2=(1-\cos\theta)(1-\sin\theta)=f(1)=1+p+q$

(2)由　$2\cos^2\frac{\theta}{2}=1+(2\cos^2\frac{\theta}{2}-1)=1+\cos\theta$

$(\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2})^2=1+2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}=1+\sin\theta$　　得

$2\cos^2\frac{\theta}{2}(\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2})^2=(1+\cos\theta)(1+\sin\theta)$

$=(-1-\cos\theta)(-1-\sin\theta)=f(-1)=1-p+q$

11、函數$f(x)=3\sin x+\cos 2x$之最大值爲何？最小值爲何？

答案：$f(x)=3\sin x+1-2\sin^2 x=-2(t-\frac{3}{4})^2+\frac{17}{8}$

令$\sin x=t$，則$-1\le t\le 1$　故　$-4\le f(x)\le\frac{17}{8}$，即最大值爲$\frac{17}{8}$，最小值爲-4。

14、試證下列各式：

(1) $\frac{\sin 2\theta}{1-\cos 2\theta}=\cot\theta$　　(2) $\tan\theta+\tan\frac{\theta}{2}=\csc\theta-2\cot 2\theta$

(3) $\sec 2\theta=\frac{\sec^2\theta}{2-\sec^2\theta}$　　(4) $\cos 4\theta=1-8\sin^2\theta+8\sin^4\theta$

答案：(1) $\frac{\sin 2\theta}{1-\cos 2\theta}=\frac{2\sin\theta\cos\theta}{1-(1-2\sin^2\theta)}=\frac{2\sin\theta\cos\theta}{2\sin^2\theta}=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\cot\theta$

(2) $\tan\theta+\tan\frac{\theta}{2}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\sin^2\theta+\cos\theta-\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$

$=\frac{\cos\theta}{\sin\theta\cos\theta}-\frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$

$=\frac{1}{\sin\theta}-\frac{2\cos 2\theta}{2\sin\theta\cos\theta}=\frac{1}{\sin\theta}-\frac{2\cos 2\theta}{\sin 2\theta}=\csc\theta-2\cot 2\theta$

(3) $\sec 2\theta=\frac{1}{\cos 2\theta}=\frac{1}{2\cos^2\theta-1}=\frac{\sec^2\theta}{\sec^2\theta(2\cos^2\theta-1)}=\frac{\sec^2\theta}{2-\sec^2\theta}$

(4) $\cos 4\theta=1-2\sin^2 2\theta=1-2(2\sin\theta\cos\theta)^2$

$=1-8\sin^2\theta\cos^2\theta=1-8\sin^2\theta(1-\sin^2\theta)$

18、設$\tan\frac{\theta}{2}=t$，試以t表$\sin 2\theta,\ \cos 2\theta,\ \tan 2\theta$。

答案：$\tan\theta=\dfrac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}=\dfrac{2t}{1-t^2}$

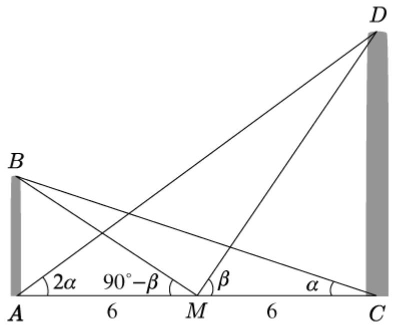
$$\sin 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}=\frac{2\cdot\frac{2t}{1-t^2}}{1+(\frac{2t}{1-t^2})^2}=\frac{4t(1-t^2)}{(1-t^2)^2+(2t)^2}=\frac{4t(1-t^2)}{1+2t^2+t^4}$$

$$\cos 2\theta=\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}=\frac{1-(\frac{2t}{1-t^2})^2}{1+(\frac{2t}{1-t^2})^2}=\frac{(1-t^2)^2-(2t)^2}{(1-t^2)^2+(2t)^2}=\frac{1-6t^2+t^4}{1+2t^2+t^4}$$

$$\tan 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\frac{2\cdot\frac{2t}{1-t^2}}{1-(\frac{2t}{1-t^2})^2}=\frac{4t(1-t^2)}{(1-t^2)^2-(2t)^2}=\frac{4t(1-t^2)}{1-6t^2+t^4}$$

19、有兩根電線桿豎立於地面上，相距 12 公尺。在兩桿底測得對桿頂的仰角之比爲$1:2$。在兩桿底中點測得兩桿頂的仰角互爲餘角。試求兩桿之高。

答案：



如圖，$\overline{AC}=12$公尺，M爲$\overline{AC}$之中點，$\overline{AM}=\overline{MC}=6$公尺

設$\angle ACB=\alpha$，$\angle CMD=\beta$，依題意$\angle CAD=2\alpha$，$\angle AMB=90^\circ-\beta$

在$\triangle CAD$中，$\overline{CD}=12\tan 2\alpha$，在$\triangle CMD$中，$\overline{CD}=6\tan\beta$，故

$12\tan 2\alpha=6\tan\beta$　　除以 6　$2\tan 2\alpha=\tan\beta$　　(1)

在$\triangle ABC$中，$\overline{AB}=12\tan\alpha$，在$\triangle ABM$中，$\overline{AB}=6\tan(90^\circ-\beta)=6\cot\beta$，故

$12\tan\alpha=6\cot\beta$　　除以 6　$2\tan\alpha=\cot\beta$　　(2)

$(1)\times(2)$　$4\tan 2\alpha\cdot\tan\beta=1$　　即　$\dfrac{8\tan^2\alpha}{1-\tan^2\alpha}=1$

去分母　$8\tan^2\alpha=1-\tan^2\alpha$　　移項　$9\tan^2\alpha=1\Rightarrow\tan^2\alpha=\dfrac{1}{9}\Rightarrow\tan\alpha=\dfrac{1}{3}$

故$\overline{AB}=12\tan\alpha=12\cdot\dfrac{1}{3}=4$（公尺）。又$\cot\beta=2\tan\alpha=\dfrac{2}{3},\ \tan\beta=\dfrac{3}{2}$

故$\overline{CD}=6\tan\beta=6\cdot\dfrac{3}{2}=9$（公尺）。兩桿之高分別爲 4 公尺，9 公尺。