| 高雄市明誠中學 高一數學平時測驗 日期：92.05.28 | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 範圍 | 3-2 和角公式+Ans | 班級 | | 姓名 | |
| | | 座號 | | | |

一. 單一選擇題 (每題 10 分)

1、( C ) 設 $\sin 123° = a$，$\cos 63° = b$，則 $\sin 60° =$ (A) $b\sqrt{1-a^2} - a\sqrt{1-b^2}$
(B) $ab - \sqrt{1-a^2}\sqrt{1-b^2}$ (C) $ab + \sqrt{1-a^2}\sqrt{1-b^2}$ (D) $b\sqrt{1-a^2} + a\sqrt{1-b^2}$
(E) $a\sqrt{1-a^2} + b\sqrt{1-b^2}$

解析：$\sin 60° = \sin(123° - 63°) = \sin 123° \cos 63° - \cos 123° \sin 63°$
$= ab - (-\sqrt{1-a^2})(\sqrt{1-b^2}) = ab - \sqrt{1-a^2}\sqrt{1-b^2}$

2、( C ) 設 $\sin 137° = a$，$\cos 111° = b$，則 $\cos 248° =$ (A) $\sqrt{1-a^2} \cdot b - a \cdot \sqrt{1-b^2}$
(B) $\sqrt{1-a^2} \cdot b + a \cdot \sqrt{1-b^2}$ (C) $-\sqrt{1-a^2} \cdot b - a \cdot \sqrt{1-b^2}$ (D) $-\sqrt{1-a^2} \cdot b + a \cdot \sqrt{1-b^2}$
(E) $ab - \sqrt{1-a^2}\sqrt{1-b^2}$

解析：$\cos 248° = \cos(137° + 111°) = (-\sqrt{1-a^2})b - a(\sqrt{1-b^2})$

3、( C ) $\sin 10° \cos 25° - \cos 10° \sin 25° =$ (A) $\cos 35°$ (B) $\sin 35°$ (C) $-\sin 15°$ (D) $\sin 15°$
(E) $-\sin 35°$

解析：$\sin(10° - 25°) = \sin(-15°) = -\sin 15°$

4、( A ) $\sin 197° \sin 347° - \cos 17° \sin 103° =$ (A) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (B) $-\frac{1}{2}$ (C) $0$ (D) $\frac{1}{2}$ (E) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

解析：$(-\sin 17°)(-\sin 13°) - (\cos 17°)(+\cos 13°) = -[\cos 30°] = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

5、( A ) $\cos(\theta + 15°)\cos(\theta - 75°) + \sin(\theta + 15°)\sin(\theta - 75°) =$ (A) $0$ (B) $\cos(2\theta - 60°)$ (C) $-1$
(D) $\sin(2\theta - 60°)$ (E) $1$

解析：$\cos[(\theta + 15°) - (\theta - 75°)] = \cos 90° = 0$

6、( D ) $\cos 117° \sin(33°) - \sin 63° \sin 303° =$ (A) $\frac{-1}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (C) $0$ (D) $\frac{1}{2}$ (E) $\frac{-\sqrt{3}}{2}$

解析：$(-\cos 63°)(\sin 33°) - (\sin 63°)(-\cos 33°) = \sin(63° - 33°) = \sin 30° = \frac{1}{2}$

二. 填充題 (每題 10 分)

1、設 $\tan\alpha = \frac{1}{4}$，$\tan\beta = \frac{1}{2}$，則 $\cot(\alpha + \beta) =$ ______，$\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} =$ ______。

答案：$\frac{7}{6}$，$-\frac{2}{7}$

解析：$\tan(\alpha + \beta) = \frac{6}{7}$ $\therefore \cot(\alpha + \beta) = \frac{7}{6}$ $\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} = -\frac{2}{7}$

2、求 $\cos 25° \sin 20° + \cos 20° \sin 25° =$ ______。

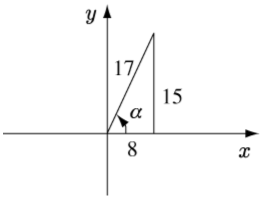
答案：$\frac{\sqrt{2}}{2}$

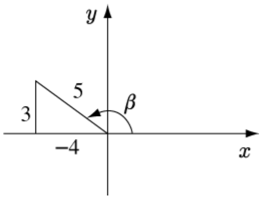
解析：$\sin(25° + 20°) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

3、設$\alpha$爲第一象限角，$\beta$爲第二象限角，且$\cot\alpha=\dfrac{8}{15}$，$\sin\beta=\dfrac{3}{5}$，試求

$\sin(\alpha+\beta),\ \tan(\alpha+\beta),\ \cos(\alpha-\beta)$之値。

答案：




$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\frac{15}{17}\times(\frac{-4}{5})+\frac{8}{17}\times\frac{3}{5}=\frac{-36}{85}$$

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\frac{15}{8}+(\frac{-3}{4})}{1-\frac{15}{8}\times(\frac{-3}{4})}=\frac{9}{8}\times\frac{32}{77}=\frac{36}{77}$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\frac{8}{17}\times(-\frac{4}{5})+\frac{15}{17}\times\frac{3}{5}=\frac{13}{85}$$

4、$\triangle ABC$中$\tan A=2,\ \tan B=3$，則$\cos C=$______。

答案：$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

解析：$\tan C=-\tan(A+B)=1\quad \therefore \cos C=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

5、$\triangle ABC$中，$\cos A=\dfrac{5\sqrt{3}}{14},\ \cos B=\dfrac{3\sqrt{3}}{14}$，則$\cos C=$______，又$\angle C=$______。

答案：$\dfrac{1}{2},\ 60^\circ$

解析：$\cos A=\dfrac{5\sqrt{3}}{14},\ \sin A=\dfrac{11}{14},\ \cos B=\dfrac{3\sqrt{3}}{14}\quad \therefore \sin B=\dfrac{13}{14}$

$\therefore \cos C=-\cos(A+B)=-(-\dfrac{1}{2})=\dfrac{1}{2}\quad \therefore \angle C=60^\circ$

6、求$\sin(27^\circ+\theta)\cdot\cos(63^\circ-\theta)-\cos(207^\circ+\theta)\cdot\sin(117^\circ+\theta)=$______。

答案：1

解析：$\sin(27^\circ+\theta)\cdot\cos(63^\circ-\theta)-[-\cos(27^\circ+\theta)][\sin(63^\circ-\theta)]=\sin(27^\circ+\theta+63^\circ-\theta)=\sin 90^\circ=1$

7、求$\sqrt{3}\tan17^\circ\tan77^\circ+\tan17^\circ-\tan77^\circ=$______。

答案：$-\sqrt{3}$

解析：$\tan60^\circ=\tan(77^\circ-17^\circ)=\dfrac{\tan77^\circ-\tan17^\circ}{1+\tan77^\circ\tan17^\circ}=\sqrt{3}$

$\therefore \sqrt{3}\tan77^\circ\tan17^\circ+\tan17^\circ-\tan77^\circ=-\sqrt{3}$

8、設$\tan\alpha=2,\ \cot(\alpha-\beta)=\dfrac{7}{9}$，則$\tan\beta=$______。

答案：$\dfrac{1}{5}$

解析：由$\cot(\alpha-\beta)=\dfrac{\cot\alpha\cot\beta+1}{\cot\beta-\cot\alpha}=\dfrac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{k}+1}{\frac{1}{k}-\frac{1}{2}}=\dfrac{7}{9}$　得$k=\dfrac{1}{5}$

或$\tan\beta=\tan(\alpha-(\alpha-\beta))=\dfrac{2-\frac{9}{7}}{1+2\times\frac{9}{7}}=\dfrac{5}{25}=\dfrac{1}{5}$

9、設$\tan\alpha+\tan\beta=5$，$\cot\alpha+\cot\beta=\dfrac{5}{2}$，則

(1) $\tan\alpha\cdot\tan\beta=$______，　(2) $\tan(\alpha+\beta)=$______。

答案：(1)$-5$　(2) 2

解析：(1) $\tan\alpha+\tan\beta=5$，又$\cot\alpha+\cot\beta=\dfrac{5}{2}$　$\therefore\tan\alpha\cdot\tan\beta=2$

(2)$\therefore\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{5}{1-2}=-5$

10、設方程式$x^2-5x-3=0$之二根爲$\tan\alpha$, $\tan\beta$，試求：(1) $\tan(\alpha+\beta)=$______。

(2) $\sin^2(\alpha+\beta)-2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)+3\cos^2(\alpha+\beta)=$______。

答案：(1) $\dfrac{5}{4}$　(2) $\dfrac{33}{41}$

解析：(1) $\tan\alpha+\tan\beta=5$, $\tan\alpha\cdot\tan\beta=-3$, $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{5}{1-(-3)}=\dfrac{5}{4}$

(2) $\sin^2(\alpha+\beta)-2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)+3\cos^2(\alpha+\beta)$

$$=\frac{\frac{\sin^2(\alpha+\beta)}{\cos^2(\alpha+\beta)}-\frac{2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)}{\cos^2(\alpha+\beta)}+\frac{3\cos^2(\alpha+\beta)}{\cos^2(\alpha+\beta)}}{\frac{1}{\cos^2(\alpha+\beta)}}$$

$$=\frac{\tan^2(\alpha+\beta)-2\tan^2(\alpha+\beta)+3}{1+\tan^2(\alpha+\beta)}=\frac{(\frac{5}{4})^2-2(\frac{5}{4})+3}{1+(\frac{5}{4})^2}=\frac{33}{41}$$

11、$\dfrac{1-\tan101^\circ\tan229^\circ}{\cot11^\circ+\tan311^\circ}=$______。

答案：$\sqrt{3}$

解析：原式$=\dfrac{1-(-\cot11^\circ)(\cot41^\circ)}{\cot11^\circ+(-\cot41^\circ)}=\cot(41^\circ-11^\circ)=\sqrt{3}$

12、(1) $\cos75^\circ=$______。　(2) $\dfrac{\tan214^\circ-\tan349^\circ}{1+\tan191^\circ\tan146^\circ}=$______。

答案：(1) $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

(2) 1

解析：(1) $\cos75^\circ=\cos(45^\circ+30^\circ)=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ (2) $\dfrac{\tan34^\circ-(-\tan11^\circ)}{1+(\tan11^\circ)(-\tan34^\circ)}=\tan(34^\circ+11^\circ)=1$

13、設$\cos\alpha+\cos\beta=\dfrac{12}{7}$, $\sin\alpha+\sin\beta=\dfrac{4\sqrt{3}}{7}$，則$\cos(\alpha-\beta)=$______。

答案：$\dfrac{47}{49}$

解析：$(\cos\alpha+\cos\beta)^2+(\sin\alpha+\sin\beta)^2=2+2\cos(\alpha-\beta)=\dfrac{192}{49}\therefore\cos(\alpha-\beta)=\dfrac{47}{49}$

14、設$0<\alpha,\ \beta<\dfrac{\pi}{2}$。若$\tan\alpha=\dfrac{5}{6},\ \cot\beta=11$，試求$\alpha+\beta$

答案：由$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$及$0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$，得$0<\alpha+\beta<\pi$，今知$\tan\alpha=\dfrac{5}{6},\ \cot\beta=11,\ \tan\beta=\dfrac{1}{11}$，

故 $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{\frac{5}{6}+\frac{1}{11}}{1-\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{11}}=\dfrac{55+6}{66-5}=\dfrac{61}{61}=1$

又由$0<\alpha+\beta<\pi$且$\tan(\alpha+\beta)=1$，可得$\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{4}$。

15、試證$\cos(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha-\beta)=\cos^2\alpha-\sin^2\beta$。

答案：$\cos(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha-\beta)=(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)$

$=\cos^2\alpha\cos^2\beta-\sin^2\alpha\sin^2\beta=\cos^2\alpha-\sin^2\beta$

13、試證$\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(\alpha-\beta)=\sin^2\alpha-\sin^2\beta$。

答案：$\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(\alpha-\beta)=(\sin\alpha\cos\beta)^2-(\cos\alpha\sin\beta)^2$

$=\sin^2\alpha(1-\sin^2\beta)-(1-\sin^2\alpha)\sin^2\beta=\sin^2\alpha-\sin^2\beta$

14、設$\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{4}$，試求$(1+\tan\alpha)(1+\tan\beta)$之值。

答案：已知$\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{4}$，取正切 $\tan(\alpha+\beta)=\tan\dfrac{\pi}{4}$

而有 $\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=1$ 去分母$\tan\alpha+\tan\beta=1-\tan\alpha\tan\beta$

等號兩邊同加$1+\tan\alpha\tan\beta$，得$1+\tan\alpha+\tan\beta+\tan\alpha\tan\beta=2$

即 $(1+\tan\alpha)(1+\tan\beta)=2$

15、( A ) $\sin(x+y)\sin(x-y)=$ (A) $\sin^2x-\sin^2y$ (B) $\sin^2x-\cos^2y$ (C) $\cos^2x-\sin^2y$ (D) $\cos^2x-\cos^2y$ (E) $\sin^2y-\sin^2x$

解析：$\sin(x+y)\cdot\sin(x-y)=(\sin x\cos y)^2-(\cos x\sin y)^2$

$=\sin^2x(1-\sin^2y)-(1-\sin^2x)\sin^2y=\sin^2x-\sin^2y$

16、( A ) $\cos(x+y)\cos(x-y)=$ (A) $\cos^2x-\sin^2y$ (B) $\sin^2x-\cos^2y$ (C) $\sin^2x-\sin^2y$ (D) $\cos^2x-\cos^2y$ (E) $\sin^2x+\cos^2y$

解析：$\cos(x+y)\cdot\cos(x-y)=(\cos x\cos y-\sin x\sin y)(\cos x\cos y+\sin x\sin y)$

$=\cos^2x\cos^2y-\sin^2x\sin^2y=\cos^2x-\sin^2y$

18、設方程式$x^2+px+q=0$之二根爲$\tan\alpha,\ \tan\beta$，其中$q\neq1$，試證

$\sin^2(\alpha+\beta)+p\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)+q\cos^2(\alpha+\beta)=q$。

答案：由根與係數關係：$\tan\alpha+\tan\beta=-p$， $\tan\alpha\cdot\tan\beta=q$

於是 $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{-p}{1-q}=\dfrac{p}{q-1}$

而有 $\sin^2(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan^2(\alpha+\beta)}{1+\tan^2(\alpha+\beta)}=\dfrac{p^2}{(q-1)^2+p^2}$

$\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan(\alpha+\beta)}{1+\tan^2(\alpha+\beta)}=\dfrac{p(q-1)}{(q-1)^2+p^2}$

$\cos^2(\alpha+\beta)=\dfrac{1}{1+\tan^2(\alpha+\beta)}=\dfrac{(q-1)^2}{(q-1)^2+p^2}$

故 $\sin^2(\alpha+\beta)+p\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)+q\cos^2(\alpha+\beta)$

$=\dfrac{p^2}{(q-1)^2+p^2}+\dfrac{p^2(q-1)}{(q-1)^2+p^2}+\dfrac{q(q-1)^2}{(q-1)^2+p^2}$

$=\dfrac{p^2q+q(q-1)^2}{(q-1)^2+p^2}=\dfrac{q[(q-1)^2+p^2]}{(q-1)^2+p^2}=q$