高雄市明誠中學 高一數學平時測驗　　日期：92.05.19					
範圍	2-6(2)三角測量+Ans	班級		姓名	
		座號			

一、單選題 (每題 10 分)

1. (　　)老張從旗竿底 O 點的正西方 A 點，測得桿頂 T 點的仰角為 $30°$，他向旗桿前進 30 公尺至 B 點，再測得桿頂的仰角為 $60°$，若老張由 B 點向正南方走到 D 點，測得桿頂的仰角為 $45°$，則 $\overline{BD}$ $=$

   (A) $15\sqrt{2}$　(B) $15\sqrt{3}$　(C) 15　(D) $15(3-\sqrt{3})$　(E) $15(\sqrt{3}-1)$公尺。

答案. (A)

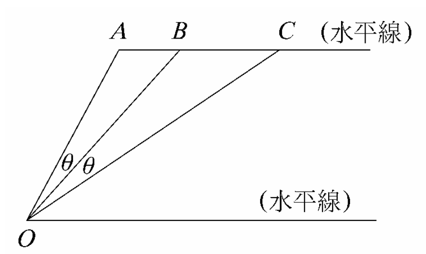
詳解：$\because$　$\angle TDO=45°$　$\therefore$　$\overline{OD}=\overline{OT}=15\sqrt{3}\Rightarrow$　$\overline{BD}$ $=\sqrt{\overline{OD}^2-\overline{OB}^2}=15\sqrt{2}$ 公尺

2. (　　)某甲觀測一飛行中之熱氣球，發現其方向一直維持在正前方，而仰角則以等速遞減。已知此氣球的高度維持不變，則氣球正以

   (A)等速飛行　(B)加速向某甲飛來　(C)減速向某甲飛來　(D)加速離某甲飛去　(E)減速離某甲飛去。

答案. (D)

詳解：

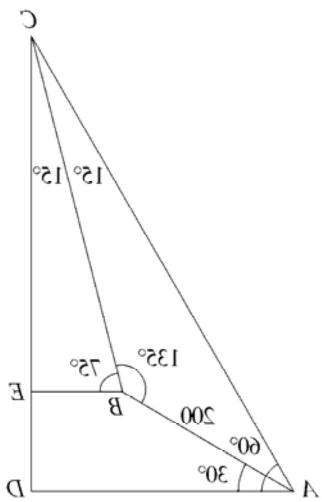


如上圖，令熱氣球由 A 沿水平線飛至 B 與由 B 飛至 C 所需時間均為 t 秒，又因為仰角以等速遞減故 $\angle AOB=\angle BOC=\theta$

故由幾何性質得知：$\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}}=\dfrac{\overline{OA}}{\overline{OC}}$，因為 $\overline{OC}>\overline{OA}$，所以 $\overline{BC}>\overline{AB}$。再令 V_1 及 V_2 分別表熱氣球由 A 至 B 及由 B 至 C 的速度，則 $V_1=\dfrac{\overline{AB}}{t}$，$V_2=\dfrac{\overline{BC}}{t}$ 因為 $\overline{BC}>\overline{AB}$，顯然可得 $V_2>V_1$　故熱氣球加速離某甲飛去，故應選(D)

3. (　　)某人於山麓測得山頂的仰角為 $60°$，由此山麓循 $30°$斜坡上行 200 公尺，再測得山頂的仰角為 $75°$，試求山高 $=$ (A) $100(\sqrt{3}+1)$　(B) $100(\sqrt{3}-1)$　(C) $100(3+\sqrt{3})$　(D)$100(3-\sqrt{3})$　(E) $25(3-\sqrt{3})$

答案. (C)



詳解：如下圖，在$\triangle ABC$ 中，$\angle CAB=60°-30°=30°$

$\angle ACB=\angle ACD-\angle BCE=30°-15°=15°$

故 $\angle ABC=180°-30°-15°=135°$

由正弦理得 $\dfrac{\overline{AC}}{\sin 135°}=\dfrac{\overline{AB}}{\sin 15°}$　$\Rightarrow$　$\overline{AC}=\dfrac{200\sin 135°}{\sin 15°}$

又在△ACD 中，$\overline{CD}=\overline{AC}\sin 60^\circ=\dfrac{200\sin 135^\circ \sin 60^\circ}{\sin 15^\circ}$

$$=\frac{200\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}=100(3+\sqrt{3})$$

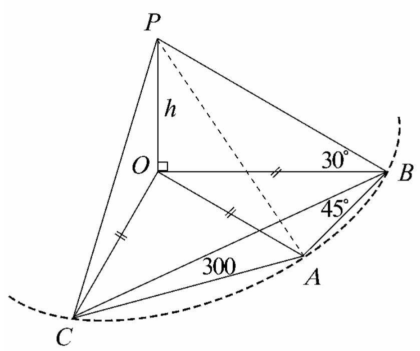
應選(C)

二、填充題 (每題 10 分)

1. 從平地上 A、B、C 三點測得<u>新光</u>大樓樓頂之仰角均為 30°。若$\angle ABC=45^\circ$，而$\overline{AC}=300$ 公尺，則此大樓的高為__________公尺。

答案. $50\sqrt{6}$ 公尺

詳解



從 A，B，C 三點測得樓頂之仰角均為 30°

$\Rightarrow$ 如圖：$\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}$ 且 A，B，C 共圓

設$\overline{OP}=h$ $\Rightarrow$ $\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}=\sqrt{3}\,h$

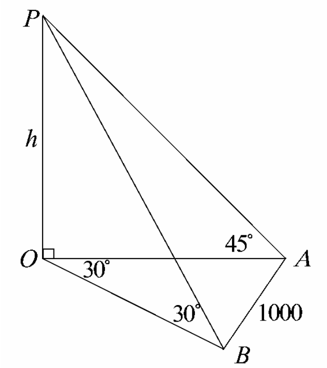
於△ABC 中，$\overline{AC}=2R\sin 45^\circ$，$R=\overline{OA}$

$\Rightarrow$ $300=2\cdot\sqrt{3}\,h\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $\Rightarrow$ $h=50\sqrt{6}$

2. 自塔之東一點 A，測得塔頂之仰角為 45°；在塔之南 60°東一點 B，測得塔頂之仰角為 30°。設 A、B 兩點相距 1000 公尺，則塔高為__________公尺。

答案. 1000 公尺

詳解



如圖：設塔高$\overline{OP}=h$ 公尺

於△OAP 中，$\angle OAP=45^\circ$ $\Rightarrow$ $\overline{OA}=h$

於△OBP 中，$\angle OBP=30^\circ$ $\Rightarrow$ $\overline{OB}=\sqrt{3}\,h$

於△OAB 中，$\angle AOB=30^\circ$，由餘弦定理

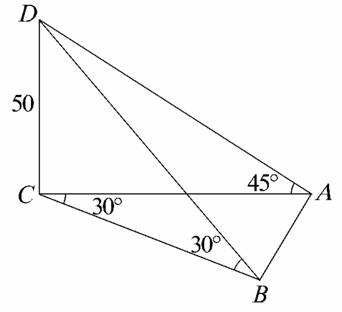
$\overline{AB}^2=\overline{OA}^2+\overline{OB}^2-2\,\overline{OA}\cdot\overline{OB}\cdot\cos 30^\circ$

$\Rightarrow$ $1000^2=h^2+3h^2-2\cdot h\cdot\sqrt{3}\,h\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=h^2 \therefore$ $h=1000$

3. 在山頂測得地面上石頭 A 的俯角為 45°，向右轉 30°，再測得地面上石頭 B 的俯角為 30°，已知山高為 50 公尺，則$\overline{AB}=$__________公尺。

答案. 50

詳解



由 D 測 A 的俯角為 45° $\Rightarrow$ 由 A 測 D 的仰角為 45°

由 D 測 B 的俯角為 30° $\Rightarrow$ 由 B 測 D 的仰角為 30°

在 D 測 A 俯角後，向右轉 30°

$\therefore$ $\angle ACB=30^\circ$(小心並不是$\angle ADB=30^\circ$)

$\therefore$ $\overline{AC}=50$，$\overline{BC}=50\sqrt{3}$

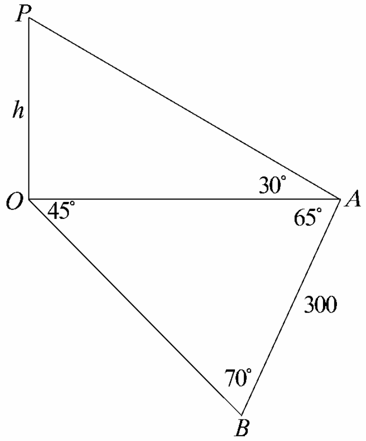
由餘弦定理$\overline{AB}^2=\overline{BC}^2+\overline{AC}^2-2\,\overline{BC}\cdot\overline{AC}\cos\angle ACB$

$=50^2+(50\sqrt{3})^2-2(50)(50\sqrt{3})\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=50^2\Rightarrow\ \overline{AB}=50$

4. 平面上有 A、B 兩點，A 在塔的正東，B 在塔的東南且在 A 的南 25°西 300 公尺處，在 A 測得塔頂的仰角爲 30°，則塔高爲__________公尺。(但 sin70°= 0.9397，sin45°= 0.7071，$\sqrt{3}=1.732$；塔高小數點以下完全捨去。)

答案. 231 公尺

詳解



如圖；塔$\overline{OP}$之高度爲 h 公尺

$\angle AOB=45°$，$\angle OAB=65°\quad\Rightarrow\quad\angle OBA=70°$

$\overline{AB}=300$，由正弦定理(△OAB)

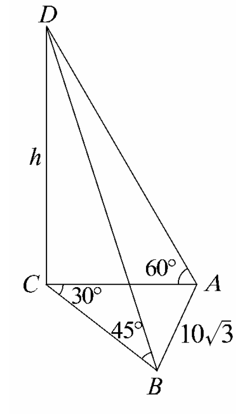
$\dfrac{\sin 45°}{300}=\dfrac{\sin 70°}{\overline{OA}}\Rightarrow\quad\overline{OA}=\dfrac{300\sin 70°}{\sin 45°}$

$\Rightarrow\quad h=\overline{OA}\tan30°=\dfrac{300\sin 70°}{\sqrt{3}\sin 45°}=\dfrac{300\times0.9397}{1.732\times0.7071}\doteqdot 231$(公尺)

5. 一塔高爲 h，石頭 A 在塔的正東，石頭 B 在塔的東 30°南，一人從塔頂測得石頭 A 的俯角爲 60°，石頭 B 之俯角爲 45°，若$\overline{AB}=10\sqrt{3}$公尺，則塔高 $h=$ __________公尺。

答案. 30

詳解



由 D 測 A 的俯角爲 60° $\Rightarrow$ 由 A 測 D 的仰角爲 60°

由 D 測 B 的俯角爲 45° $\Rightarrow$ 由 B 測 D 的仰角爲 45°

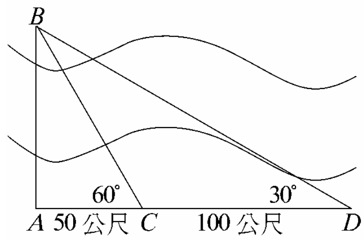
$\therefore\quad\overline{BC}=h$，$\overline{AC}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}h$

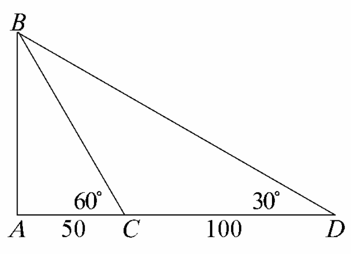
利用餘弦定理$\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2-2\,\overline{AC}\cdot\overline{BC}\cos30°$

$\Rightarrow\quad 300=h^2+\dfrac{1}{3}h^2-2\cdot h\cdot\dfrac{h}{\sqrt{3}}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{1}{3}h^2$

$\Rightarrow\quad h^2=900\quad\Rightarrow\quad h=30$(公尺)

6. 如圖，A、B 兩點分別位於一河口的兩岸邊。某人在通往 A 點的筆直公路上，距離 A 點 50 公尺的 C 點與距離 A 點 150 公尺的 D 點，分別測得$\angle ACB=60°$，$\angle ADB=30°$，則 A 與 B 的距離爲__________公尺。





答案. $50\sqrt{3}$

詳解

$\angle ACB=60°$，$\angle ADB=30°\Rightarrow\quad\overline{BC}=\overline{CD}=100$

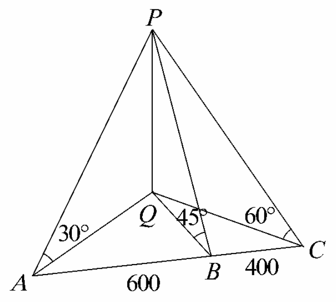
在△ABC 中

$\overline{AB}=\overline{BC}\sin60°=100\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=50\sqrt{3}$

7. 由地面上共線三點 A，B，C 測得一塔頂 P 的仰角各為 30°，45°，60°，已知塔基 Q 與 A，B，C 不共線，且 $\overline{AB}=600$ 公尺，$\overline{BC}=400$ 公尺，則山高 $\overline{PQ}$ 為__________公尺。

答案. $200\sqrt{15}$

詳解



令 $\overline{PQ}=h$　∴　$\overline{AQ}=\sqrt{3}\,h$，$\overline{BQ}=h$，$\overline{CQ}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}h$

在△ABQ 及△ACQ 中

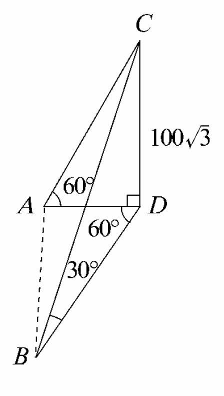
$$\cos\angle QAB=\frac{600^2+(\sqrt{3}h)^2-h^2}{2\times600\times\sqrt{3}h}=\frac{1000^2+(\sqrt{3}h)^2-(\frac{1}{\sqrt{3}}h)^2}{2\times1000\times\sqrt{3}h}$$

$\Rightarrow$　$5(360000+3h^2-h^2)=3(10^6+3h^2-\frac{1}{3}h^2)\Rightarrow$　$h=200\sqrt{15}$ 公尺

8. 有一塔高 $100\sqrt{3}$ 公尺，樹 A 在塔的正西方，樹 B 在塔的西 60°南，某人自塔頂測得樹 A，樹 B 之俯角分別為 60°與 30°，則 A，B 的距離為__________公尺。

答案. $100\sqrt{7}$

詳解



$\overline{DA}=\overline{CD}\cot60°=100\sqrt{3}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}}=100$

$\overline{DB}=\overline{CD}\cot30°=100\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}=300$

$\overline{AB}^2=\overline{DA}^2+\overline{DB}^2-2\,\overline{DA}\cdot\overline{DB}\cos60°$

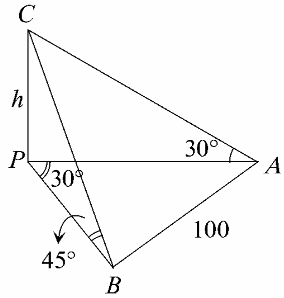
$=100^2+300^2-2\cdot100\cdot300\cdot\dfrac{1}{2}=70000$

∴　$\overline{AB}=100\sqrt{7}$

9. 在地面上相距 100 公尺的兩點 A、B 測得塔頂的仰角分別為 30°與 45°，塔底為 P，若 $\angle APB=30°$，則 $\overline{AB}=$ __________公尺。

答案.100

詳解



設塔高為 h，則 $\overline{AP}=\sqrt{3}\,h$，$\overline{BP}=h$

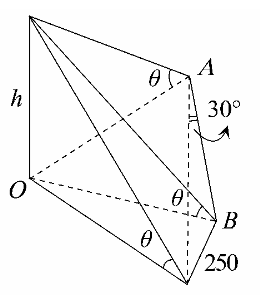
∴　$100^2=(\sqrt{3}\,h)^2+h^2-2\cdot\sqrt{3}\,h\cdot h\cdot\cos30°$

$\Rightarrow$　$100^2=3h^2+h^2-3h^2=h^2$　$\Rightarrow$　$h=100$

10. 自平面上三點 A、B、C 測得某山頂之仰角均為 θ，若 $\angle BAC=30°$，$\cot\theta=2$，$\overline{BC}=250$ 公尺，則山高為__________公尺。

答案.125

詳解

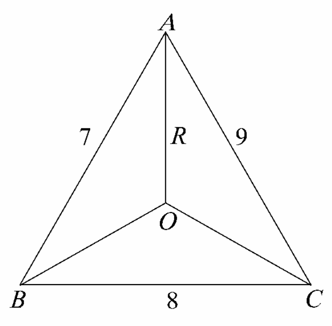


$\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}=h\cot\theta=2h$，∴　A、B、C 在以 O 為圓心，$2h$ 為半徑之圓上∴　$2h=\dfrac{250}{2\sin30°}$　$\Rightarrow$　$h=125$

11. 市郊有甲、乙、丙三家，兩兩相距 70 公尺、80 公尺、90 公尺，今計畫公設一井，使此井到三家必須等距，試求此距離＿＿＿＿＿＿。

答案. $21\sqrt{5}$ 公尺

詳解



如圖：所求為△ABC 之外接圓半徑 R，由餘弦定理知

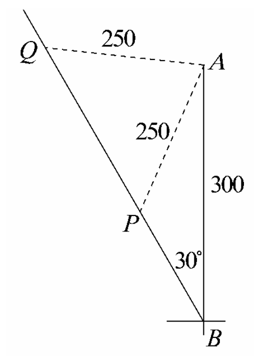
$$\cos B=\frac{70^2+80^2-90^2}{2\cdot 70\cdot 80}=\frac{2}{7}$$

$$\Rightarrow \quad \sin B=\frac{3\sqrt{5}}{7}=\frac{90}{2R} \quad \Rightarrow \quad R=21\sqrt{5}$$

12. 根據氣象預報，某颱風於某日下午 2 時的中心位置在鵝鑾鼻燈塔正南方 300 公里處，暴風半徑為 250 公里，以每小時 50 公里的速率朝「北 30°西」等速前進。設此颱風的速度方向及暴風半徑都不變，求鵝鑾鼻燈塔在此暴風圈內前後共有多少小時？＿＿＿＿＿

答案. 8 小時

詳解：



設鵝鑾鼻在 A，下午 2 時颱風中心在 B

如圖，由餘弦定理，$\angle ABP=30°$

$\Rightarrow \quad 250^2=300^2+x^2-2\cdot 300\cdot x\cdot \cos 30°$，$x=\overline{BP}$

$\Rightarrow \quad x^2=300\sqrt{3}\,x+27500=0$

設其二根為 x_1，x_2

$\Rightarrow \quad \overline{PQ}^2=|x_1-x_2|^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2$

$=(300\sqrt{3})^2-4\cdot 27500=100^2(27-11) \Rightarrow \quad \overline{PQ}=400$，$400\div 50$

$=8$ (小時)