高雄市明誠中學 高一數學平時測驗 日期：92.03.12					
範圍	1-4 對數函數、圖形 +Ans	班級		姓名	
		座號			

一. 單一選擇題 (每題 10 分)

1、解$\log_{\frac{1}{5}}\log_3 x \ge 1$，則 x 的範圍為______。

答案：$1 < x \le \sqrt[5]{3}$

解析：$\log_{\frac{1}{5}}\log_3 x \ge 1$ $\therefore 0 < \log_3 x \le \frac{1}{5}$ $\therefore 1 < x \le 3^{\frac{1}{5}}$ $\therefore 1 < x \le \sqrt[5]{3}$

2、函數 $y=f(x)$與函數 $y=f^{-1}(x)$的圖形在坐標平面上對稱於直線______。

答案：$x=y$

3、解$\log_3(3^x+9)=\frac{x}{2}+\log_3 10$，則$x=$______或______。

答案：0, 4

解析：$3^x+9=3^{\frac{x}{2}}\times 10$ 令$t=3^{\frac{x}{2}}$ $\therefore t^2-10t+9=0$ $\therefore t=1$或 9

$\therefore 3^{\frac{x}{2}}=1$或$3^{\frac{x}{2}}=9$ $\therefore x=0$或 4

4、設 x, y 滿足$\begin{cases}3\log_2 x=\log_2 y\\ xy=10000\end{cases}$，則$x=$______, $y=$______。

答案：10, 1000

解析：$\because 3\log_2 x=\log_2 y$ $\therefore x^3=y$

又$xy=10^4$ $\therefore x^4=10^4$ $\therefore x=\pm 10\,(-10$ 不合$)$, $y=1000$

5、方程式$2\log x^4=\log(2x+3)^4$，則$x=$______。

答案：3 或-1

解析：$2\log x^4=\log(2x+3)^4$ $\therefore x^8=(2x+3)^4$

$\therefore x^2=2x+3$ 或 $x^2=-2x-3$ $\therefore x=3$或-1

6、解不等式$\log_{0.5}x+8\log_x\frac{1}{2}\ge 9$，則 x 的範圍為______或______。

答案：$0 < x \le \frac{1}{256}$, $\frac{1}{2}\le x\le 1$

解析：令$t=\log_{0.5}x$ $\therefore \log_x\frac{1}{2}=\frac{1}{t}$, $t+\frac{8}{t}\ge 9$

$\therefore t(t-1)(t-8)\ge 0$ $\therefore t\ge 8$或$0\le t\le 1$ $\therefore 0 < x\le \frac{1}{256}$, $\frac{1}{2}\le x\le 1$

7、解不等式$\log_{0.5}(x^2+3x)>-2$，則其解為_______。

答案：$-4 < x < -3$或$0 < x < 1$

解析：$\because 0.5 < 1$ $\therefore x^2+3x < (\frac{1}{2})^{-2}$ $\therefore -4 < x < 1$

又自然限制$x^2+3x>0$ $\therefore x>0$或$x<-3$

$\therefore -4 < x < -3$或$0 < x < 1$

8、設$\log x-2\log y=1$，則x^2-y^2之最小值為______。

答案：$-\dfrac{1}{400}$

解析：$\because \log x-2\log y=1 \quad \therefore \dfrac{x}{y^2}=10 \quad \therefore y^2=\dfrac{x}{10}$

$\therefore x^2-y^2=x^2-\dfrac{x}{10}=(x-\dfrac{1}{20})^2-\dfrac{1}{400}$

$\therefore$當 $x=\dfrac{1}{20}$，$y=\dfrac{\sqrt{2}}{20}$ 時，x^2-y^2 有最小值 $-\dfrac{1}{400}$

9、設 $a=\log_{\frac{1}{7}}2$，$b=\log_{\sqrt{3}}2$，$c=\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{1}{5}$，$d=\dfrac{1}{\log_3 7}$，$e=-1$，則這五數中最大者爲______，最小者爲______。

答案：c, e

解析：$a=-\log_7 2 \quad \therefore -1<a<0$

$b=2\log_3 2>1$

$c=\log_3 5>1$

$d=\dfrac{1}{\log_3 7}$

$0<d<1$ 且 $c>b \qquad \therefore c>b>1>d>0>a>e \quad \therefore$最大爲 c，最小爲 e

10、設 $a=\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{7}$，$b=\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{3}$，$c=\log_{\frac{1}{2}}3$，$d=\log_{\frac{1}{2}}5$，$e=2$，則 a, b, c, d, e 之大小順序爲______。

答案：$d<c<b<e<a$

解析：$\because 5>3>\dfrac{1}{3}>(\dfrac{1}{2})^2>\dfrac{1}{7}$ 　　又 $0<\dfrac{1}{2}<1 \quad \therefore d<c<b<e<a$

11、解 $x^{2\log x}=\dfrac{1000}{x}$，則 $x=$______。

答案：$10,\ \dfrac{1}{10\sqrt{10}}$

解析：$\log(x^{2\log x})=\log(\dfrac{1000}{x})$

令 $\log x=t \quad \therefore 2t^2=3-t \quad \therefore t=1$ 或 $-\dfrac{3}{2} \quad \therefore x=10$ 或 $\dfrac{1}{10\sqrt{10}}$

12、對數方程式 $\log_{10}(x+1)+\log_{10}(x-2)=1$ 的解爲______。

答案：4

解析：$(x+1)(x-2)=10 \qquad x^2-x-12=0 \qquad x=4,-3 \qquad \because x>2 \quad \therefore x=4$

13、求下列函數之反函數

(1) $f(x)=4-2x$

(2) $f(x)=x^2+2x+3\ (x\geq -1)$

(3) $f(x)=\dfrac{1}{x+1}\ (x\neq -1)$

答案：

$(1)f^{-1}(x)=\frac{4-x}{2}$ $(2)f^{-1}(x)=\sqrt{x-2}\ (x\geq 2)$ $(3)f^{-1}(x)=\frac{1}{x}-1\ (x\neq 0)$

解析：

$(1)y=4-2x\ \therefore x=\frac{4-y}{2}\ \therefore f^{-1}(x)=\frac{4-x}{2}$

$(2)y=x^2+2x+3, y-2=(x+1)^2, x+1=\sqrt{y-2}\ (\because x\geq -1)$

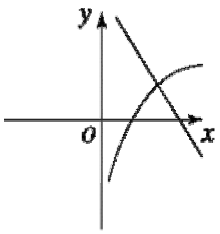
$\therefore x=\sqrt{y-2}-1\ \therefore f^{-1}(x)=\sqrt{x-2}-1$且$x\geq 2$

$(3)y=\frac{1}{x+1}\ \therefore x+1=\frac{1}{y}\ \therefore x=\frac{1}{y}-1\ \therefore f^{-1}(x)=\frac{1}{x}-1\ (x\neq 0)$

14、方程式$x+\log_3 x=3$共有______個實根。

答案：1

解析：



$\begin{cases} y=\log_3 x \\ y=3-x \end{cases}$ 其圖形為恰有一個交點 ∴共有 1 個實根

15、解方程式$(\log 5x)(\log 4x)=2$，得其兩根為α,β，則$\alpha\beta=$______。

答案：$\frac{1}{20}$

解析：令$t=\log x$ $\therefore (t+\log 5)(t+\log 4)=2$兩根為

$t_1=\log\alpha$，$t_2=\log\beta$ $\therefore t_1+t_2=\log\alpha+\log\beta=\log\alpha\beta$

又$t_1+t_2=-(\log 4+\log 5)=-\log 20=\log\frac{1}{20}$ $\therefore \alpha\beta=\frac{1}{20}$

16、解$\log_3 x-6\log_x 3-5=0$，則$x=$______。

答案：3^6，$\frac{1}{3}$

解析：令$\log_3 x=t$ $\therefore t-\frac{6}{t}-5=0$ $\therefore t=6$或-1 $\therefore x=3^6$或$\frac{1}{3}$

17、設$x^2-(\log 2)\cdot x+\log\frac{1}{2500}=0$的二根為$\alpha,\beta$，則$10^\alpha+10^\beta=$______，又二根$\alpha,\beta$為何？

答案：$100\frac{1}{50}$, 2 或$\log 2-2$

解析：$x^2-(\log 2)x-(4-2\log 2)=0$ $\therefore (x-2)(x+2-\log 2)=0$

$\therefore x=2$或$\log 2-2$ $\therefore 10^\alpha+10^\beta=10^2+10^{\log 2-2}=100\frac{1}{50}$

18、解方程式$2\log_2 x-\log_2(2x+1)=1$，則$x=$______。

答案：$2+\sqrt{6}$

解析：$\log_2 \dfrac{x^2}{2x+1}=1 \quad \therefore x^2-4x-2=0 \quad \therefore x=2\pm\sqrt{6}$

但 $\because x>0$ 且 $2x+1>0 \quad \therefore x=2+\sqrt{6}$

二. 計算與證明題 (每題 10 分)

1、解方程式 $(x^{\log 5})(5^{\log x})-4(x^{\log 5})-5=0$ 。

答案：令 $t=5^{\log x}=x^{\log 5} \quad \therefore t^2-4t-5=0$

$\therefore t=5$ 或 -1(不合) $\quad \therefore 5^{\log x}=5 \quad \therefore x=10$

2、設對任意實數 x ，恆有 $\log_{\frac{1}{3}} \dfrac{2x^2+ax+1}{x^2+x+1}+1\ge 0$ ，則 a 之範圍爲何？

答案：對任意實數 x ，$\dfrac{2x^2+ax+1}{x^2+x+1}\le 3$ 恆成立

且 $\dfrac{2x^2+ax+1}{x^2+x+1}>0 \qquad \because \forall x\in\mathbf{R}$， $x^2+x+1>0$ 恆成立

$\therefore 2x^2+ax+1>0$ 恆成立 $\quad \therefore a^2-8<0 \quad \therefore -2\sqrt{2}<a<2\sqrt{2}$

又 $x^2+(3-a)x+2\ge 0$ 恆成立 $\quad \therefore (3-a)^2-8\le 0 \quad \therefore 3-2\sqrt{2}\le a\le 3+2\sqrt{2} \qquad \therefore$

$3-2\sqrt{2}\le a<2\sqrt{2}$

3、解不等式 $\log_3(x^2-x+1)\ge \log_3(x+2)+1$

答案：自然限制 $x^2-x+1>0$，$x+2>0$

不等式 $(x^2-x+1)\ge 3(x+2)$

$\therefore (x>-2)$ 且 $(x\ge 5$ 或 $x\le -1)$

$\therefore -2<x\le -1$ 或 $x\ge 5$

4、求解方程式：

(1) $\log(x-4)+\log(x+3)=\log 30$

(2) $\log_{\frac{1}{4}} x+2\log_{16} x^2-\dfrac{3}{2}=0$

答案：(1) $\log(x-4)+\log(x+3)=\log 30$

$\Rightarrow (x-4)(x+3)=30 \qquad \Rightarrow x^2-x-42=0$

$\Rightarrow (x+6)(x-7)=0 \qquad \Rightarrow x=-6$ 或 $x=7$

但因 $x=-6$ 時， $x-4=-6-4=-10<0$ ，不合，所以 $x=7$ 。

(2) $\log_{\frac{1}{4}} x+2\log_{16} x^2-\dfrac{3}{2}=0$

$\Rightarrow \dfrac{\log x}{-2\log 2}+\dfrac{\log x}{\log 2}-\dfrac{3}{2}=0$

$\Rightarrow -\log x+2\log x-3\log 2=0 \qquad \Rightarrow \log x=\log 8 \qquad \Rightarrow x=8$

5、求滿足下列不等式的 x 之所在範圍：

(1) $4^x-2^x<12 \qquad$ (2) $(\log x)^2\ge(\log x^2)+3$

答案：(1) $4^x-2^x<12 \quad \Rightarrow (2^x)^2-2^x-12<0 \quad \Rightarrow (2^x+3)(2^x-4)<0$

$\Rightarrow -3<2^x<4$

因爲 2^x 恆爲正數，故 $0<2^x<4=2^2$ ，故 $-\infty<x<2$ 。

(2) $(\log x)^2 \geq \log x^2 + 3$ $\Rightarrow (\log x + 1)(\log x - 3) \geq 0$

$\Rightarrow \log x < -1$ 或 $\log x > 3$ $\Rightarrow 0 < x < \dfrac{1}{10}$ 或 $x > 1000$

6、解不等式 $\log_x(3x-2) \geq 2$，則其解的範圍為何？

答案：(1)設 $x > 1$ $\therefore 3x - 2 \geq x^2$ $\therefore 1 \leq x \leq 2$ $\therefore 1 < x \leq 2$

(2)設 $0 < x < 1$ $\therefore 3x - 2 \leq x^2$ $\therefore x \geq 2$ 或 $x \leq 1$ $\therefore 0 < x < 1$

又自然限制為 $3x - 2 > 0$ $\therefore x > \dfrac{2}{3}$ $\therefore \dfrac{2}{3} < x < 1$ 或 $1 < x \leq 2$

7、求滿足下列不等式的 x 值所在之範圍：

(1) $\log_3 x > 2$ (2) $\log_3(x+4) \geq 2$ (3) $\log_{0.2} 5x > -1$ (4) $-1 < \log_{0.5} x \leq 1$

答案：(1) $\log_3 x > 2 \Rightarrow x > 3^2$ $\Rightarrow x > 9$

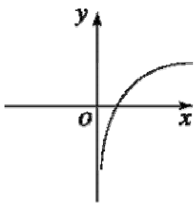
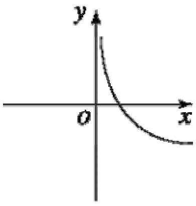
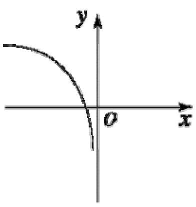
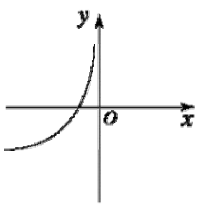
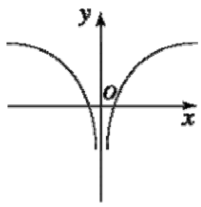
(2) $\log_3(x+4) \geq 2 \Rightarrow x + 4 \geq 3^2$ $\Rightarrow x \geq 5$

(3) $\log_{0.2} 5x > -1 \Rightarrow 5x < 5$ $\Rightarrow x < 1$

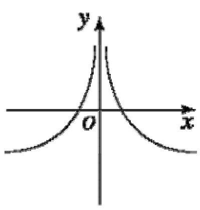
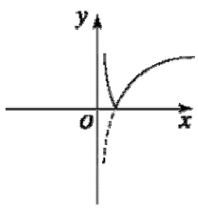
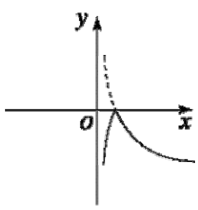
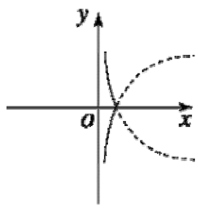
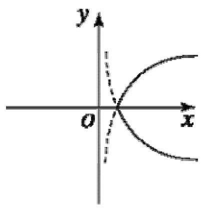
(4) $-1 < \log_{0.5} x \leq 1 \Rightarrow (\dfrac{1}{2})^{-1} > x \geq \dfrac{1}{2}$ $\Rightarrow 2 > x \geq \dfrac{1}{2}$

三. 配合題 (每小題 5 分)

1、

圖(一) 圖(二) 圖(三) 圖(四) 圖(五)

圖(六) 圖(七) 圖(八) 圖(九) 圖(十)

設 $y = \log_a x$ 的圖形為圖(一)，則

(1) $y = \log_a |x|$ 的圖形為_____。 (2) $y = -|\log_a x|$ 的圖形為_____。

(3) $y = \log_{\frac{1}{a}}(-x)$ 的圖形為_____。 (4) $|y| = \log_a x$ 的圖形為______。

答案：(1)圖(五) (2)圖(八) (3)圖(四) (4)圖(十)

解析：

(1) $y = \log_a x$ 的圖形為圖(一)

當 $x > 0$ 時 $y = \log_a x$ ，當 $x < 0$ 時 $y = \log_a(-x)$ $\therefore y = \log_a |x|$ 的圖形為圖(五)

(2)當 $\log_a x > 0$ 時 $y = -\log_a x$ ，當 $\log_a x < 0$ 時 $y = \log_a x$

$\therefore y = -|\log_a x|$ 之圖形為圖(八)

(3) $y=\log_{\frac{1}{a}}(-x)=-\log_a(-x)$ 是 $y=\log_a x$ 以原點爲中心的對稱圖形，故其圖形爲圖(四)

(4) $|y|=\log_a x \quad \therefore \log_a x>0$ ，若 $y>0$ ，則 $y=\log_a x$

若 $y<0$ ，則 $y=-\log_a x$ ，故其圖形爲圖(十)