高雄市明誠中學 高一數學平時測驗			日期：92.03.10		
範圍	1-3 對數函數+Ans	班級		姓名	
		座號			

一. 單一選擇題 (每題 10 分)

1、(D) $2x+2\log_{10}(2+10^{-x})-\log_{10}(\frac{1}{4}+10^{x}+10^{2x})=$

(A) 2×10^{x} (B) $x\cdot\log_{10}\frac{1}{4}$ (C) 1 (D) $2\log_{10}2$ (E) $2x+10^{2x}$

解析：

$$2x+2\log_{10}(2+10^{-x})-\log_{10}(\frac{1}{4}+10^{x}+10^{2x})$$

$$=\log_{10}\frac{10^{2x}(2+10^{-x})^{2}}{(\frac{1}{4}+10^{x}+10^{2x})}=\log_{10}(\frac{4\times10^{2x}+4\times10^{x}+1}{10^{2x}+10^{x}+\frac{1}{4}})=\log_{10}4=2\log_{10}2$$

2、(D) $10^{\log(\log2+\log3)}=$？ (A) 5 (B) 6 (C) $\log5$ (D) $\log6$ (E) $\log2\cdot\log3$

解析：$10^{\log_{10}(\log6)}=(\log6)^{\log_{10}10}=\log6$

3、(C) x,y 皆爲正數，若 $x^{3}=y^{2}$，$2x=3y$，則以下何者正確？ (A) $x=3$ (B) $x=y$ (C) $x^{x}=y^{y}$ (D) $4x^{x}=9y^{y}$ (E) $9x^{y}=4y^{x}$

解析：$x^{3}=y^{2}$ $\therefore x^{3x}=y^{2x}$ $\therefore x^{3x}=y^{3y}$ $\therefore x^{x}=y^{y}$ $9x^{3}=9y^{2}=(3y)^{2}=(2x)^{2}$

$\therefore 9x^{3}=4x^{2}$ $\therefore x=0$(不合)或$\frac{4}{9}$，$y=\frac{2}{3}x=\frac{8}{27}$，故 $x\neq y$

$$\log9x^{y}=\log9+y\log x=2\log3+\frac{8}{27}(2\log2-2\log3)$$

$$\log4y^{x}=\log4+x\log y=2\log2+\frac{4}{9}(3\log2-3\log3)$$

$\therefore \log9x^{y}\neq\log4y^{x}$，故 $9x^{y}\neq4y^{x}$。

4、(A) $3^{\frac{\log(\log9)}{\log3}}=$？ (A) $\log9$ (B) $3^{\log2}$ (C) $3^{\log3}$ (D) 9 (E) 27

解析：$3^{\frac{\log(\log9)}{\log3}}=3^{\log_{3}(\log9)}=\log9$

5、(B) 設 $\log_{3}5=a,\ \log_{b}2=3$，則 $9^{a}+b^{3}$ 之值爲 (A) 12 (B) 27 (C) $9^{\log_{5}3}+(\log_{b}2)^{3}$ (D) $9^{\log_{3}5}+(\log_{b}2)^{3}$ (E) $9^{\log_{5}3}+b^{\log_{b}2}$

解析：$\log_{3}5=a$ $\therefore 3^{a}=5$，$9^{a}=(3^{a})^{2}=25$ $\log_{b}2=3$ $\therefore b^{3}=2$

故 $9^{a}+b^{3}=25+2=27$

6、(D) x,y 爲異於 1 的正實數，k 爲實數，下列何者是錯誤的？ (A) $\log_{x}1=0$ (B) $\log_{10}xy=\log_{10}x+\log_{10}y$ (C) $\log_{10}k^{2}=2\log_{10}k$ (D) $\log_{10}k^{3}=3\log_{10}k$ (E) $x^{\log_{10}y}=y^{\log_{10}x}$

解析：$\because \log_{10}(-2)^{2}\neq2\log_{10}(-2)$ $\therefore \log_{10}k^{2}\neq2\log_{10}k$

$\log_{10}k^{3}$ 若有意義 $\Rightarrow k^{3}>0$ $\therefore k>0$ 故成立

7、(E) 設 $x=\log_{3}5$，則 $3^{2x}+3^{-x}$ 之值爲 (A) 5 (B) 9 (C) $\frac{28}{3}$ (D) $\frac{51}{5}$ (E) $\frac{126}{5}$

解析：$x=\log_{3}5$ $\therefore 3^{x}=5\Rightarrow3^{2x}=25$，$3^{-x}=\frac{1}{5}$ 故 $3^{2x}+3^{-x}=25+\frac{1}{5}=\frac{126}{5}$

二. 多重選擇題 (每題 10 分)

1、(BE) 下列哪些式子是正確的？ (A) $\log_7(-3)^2 = 2\log_7(-3)$ (B) $\log_7 7 = 1$

(C) $\log_{81} 3 = 4$ (D) $\log_6(3+4) = \log_6 3 + \log_6 4$ (E) $\log_{\sqrt{6}} \sqrt{7} = \log_6 7$

解析： $\log_7(-3)^2 = 2\log_7(-3) \Rightarrow$ 真數要大於 0

$\log_6(3+4) = \log_6 3 + \log_6 4 \Rightarrow \log_6 3\cdot 4 = \log_6 3 + \log_6 4$

$\log_{\sqrt{6}} \sqrt{7} = \log_6 7 \Rightarrow$ 上下可同時平方或開根號

三. 填充題 (每題 10 分)

1、設 $\log_3(\log_5 x) + \frac{1}{2}\log_{\sqrt{3}}(\log_2 25) = 1$，則 $x =$______。

答案： $2\sqrt{2}$

解析： $\log_3(\log_5 x) + \log_3(\log_2 25) = 1$

$\therefore \log_3(\log_5 x \cdot \log_2 25) = 1$ $\quad \therefore \frac{\log x}{\log 5}\cdot\frac{\log 25}{\log 2} = 3$ $\quad \log x = \frac{3}{2}\log 2$ $\quad \therefore x = 2^{\frac{3}{2}} = 2\sqrt{2}$

2、設 $\log 2 = u$, $\log 3 = v$，試用 u, v 表達下列算式

(1) $\log\frac{75}{8} =$______。(2) $\log\sqrt[3]{0.135} =$______。(3) $\log_5 24 =$______。

答案：(1) $2 + v - 5u$ (2) $v - \frac{1}{3}u - \frac{2}{3}$ (3) $\frac{3u+v}{1-u}$

解析：(1) $\log\frac{75}{8} = \log 3\times 5^2 - 3\log 2 = \log 3 + 2\log 5 - 3\log 2 = v + 2(1-u) - 3u = 2 + v - 5u$

(2) $\log\sqrt[3]{0.135} = \frac{1}{3}\log\frac{5\times 3^3}{1000} = \frac{1}{3}[\log 5 + 3\log 3 - 3] = \frac{1}{3}[(1-u) + 3v - 3] = v - \frac{1}{3}u - \frac{2}{3}$

(3) $\log_5 24 = \frac{\log 2^3\times 3}{\log 5} = \frac{3u+v}{1-u}$

3、設 $31^x = 100,\ 310^y = 10$，則 $\frac{2}{x} - \frac{1}{y} =$______。

答案：-1

解析： $31 = 10^{\frac{2}{x}}, 310 = 10^{\frac{1}{y}}$ $\quad \therefore 10^{\frac{2}{x}-\frac{1}{y}} = 10^{-1}$ $\quad \therefore \frac{2}{x} - \frac{1}{y} = -1$

4、(1) $\frac{1}{3}\log_2\frac{27}{8} - \log_2 24 + 2\log_2\sqrt[3]{2} =$______。

(2) $(\log_2 5 + \log_4 125)(\log_{\sqrt{5}} 2 - \log_{25} 4) =$______。

答案：(1) $-\frac{10}{3}$ (2) $\frac{5}{2}$

解析：(1) $\log_2\sqrt[3]{\frac{27}{8}}\times\frac{1}{24}\times\left(\sqrt[3]{2}\right)^2 = \log_2(\frac{1}{2}\times\frac{1}{8}\times 2^{\frac{2}{3}}) = -\frac{10}{3}$

(2) $[\log_2 5 + \frac{3}{2}\log_2 5][\frac{1}{\frac{1}{2}}\log_5 2 - \frac{2}{2}\log_5 2] = \frac{5}{2}\log_2 5\times\log_5 2 = \frac{5}{2}$

5、(1) $\log_3\sqrt[4]{27} =$______。(2) $\log_8(\sqrt{4+2\sqrt{3}} - \sqrt{4-2\sqrt{3}}) =$______。

答案：(1)$\frac{3}{4}$　(2)$\frac{1}{3}$

解析：(1)$\log_3 \sqrt[4]{27} = \log_3 3^{\frac{3}{4}} = \frac{3}{4}$

(2)$\log_8(\sqrt{4+2\sqrt{3}} - \sqrt{4-2\sqrt{3}}) = \log_8(\sqrt{3}+1-\sqrt{3}+1) = \log_8 2 = \frac{1}{3}$

7、設$a = \log_2 3$，$b = \log_3 7$，則以a, b表示(1)$\log_6 \frac{24}{7} =$______。

(2)$\log_3 2 + \log_{\sqrt{3}} 2^2 + \log_{\sqrt[3]{3}} 2^3 + \cdots + \log_{\sqrt[8]{3}} 2^8 =$______。

答案：(1)$\frac{a+3-ab}{a+1}$　(2)$\frac{204}{a}$

解析：(1)$\log_3 2 = \frac{1}{a}$，$\log_6 \frac{24}{7} = \frac{\log_3 \frac{24}{7}}{\log_3 6} = \frac{1+3\log_3 2 - \log_3 7}{1+\log_3 2} = \frac{1+\frac{3}{a}-b}{1+\frac{1}{a}} = \frac{a+3-ab}{a+1}$

(2)$\log_3 2 + \frac{2}{\frac{1}{2}}\log_3 2 + \frac{3}{\frac{1}{3}}\log_3 2 + \cdots + \frac{8}{\frac{1}{8}}\log_3 2 = 204\log_3 2 = \frac{204}{a}$

8、(1)設$\log_x \frac{1}{6} = -2$，則$x =$_____。(2)化$\log_5 2 = 2 - \frac{1}{a}$為$x^a = 5$，則$x =$_____。

答案：(1)$\pm\sqrt{6}$　(2)$\frac{25}{2}$

解析：(1)$\log_x \frac{1}{6} = -2$　$\therefore x^{-2} = \frac{1}{6}$　$\therefore x = \pm\sqrt{6}$　($-\sqrt{6}$不合)

(2)$\log_5 2 = 2 - \frac{1}{a}$　$\therefore \frac{1}{a} = 2 - \log_5 2$　$\therefore a = \frac{1}{\log_5 \frac{25}{2}}$

$\therefore a = \log_{\frac{25}{2}} 5$　$\therefore (\frac{25}{2})^a = 5$　$\therefore x = \frac{25}{2}$

9、設a, b, c為異於1的正數，且$a^2 = b^3, b^2 = c^3$，則(1)$\log_a b =$______。又

(2)$\log_a 5 \cdot \log_{25} c =$______。

答案：(1)$\frac{2}{3}$　(2)$\frac{2}{9}$

解析：(1)$a^2 = b^3$　$\therefore b = a^{\frac{2}{3}}$　$\therefore \log_a b = \log_a a^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}$

(2)$\log_a 5 \cdot \log_{25} c = \frac{1}{2}\log_a c = \frac{1}{2}\log_{b^{\frac{3}{2}}} b^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3}\log_b b = \frac{2}{9}$

10、設$a = \log_3 7$，$b = \log_3 8$，則$\log_{28} 49 =$______(以a, b表示之)。

答案：$\frac{6a}{2b+3a}$

解析：$\log_3 8 = b$　$\therefore \log_3 2 = \frac{b}{3}$　$\therefore \log_{28} 49 = \frac{\log_3 7^2}{\log_3 2^2 \times 7} = \frac{2 \cdot a}{2 \cdot (\frac{b}{3}) + a} = \frac{6a}{2b+3a}$

11、(1)$\log_{36} 6\sqrt[3]{6} =$______, (2)$\log_5 0.2 =$______。

答案：(1)$\frac{2}{3}$　(2)-1

解析：(1)$\log_{6^2} 6^{\frac{4}{3}} = \frac{\frac{4}{3}}{2} = \frac{2}{3}$　(2)$\log_5 \frac{1}{5} = -1$

12、解方程式(1)$\log_x 25 = 2$，則$x =$______。 (2)$\log_{0.25} x = -3$，則$x =$______。

答案：(1)5　(2) 64

解析：(1)$x^2 = 25 \quad \therefore x = \pm 5 \quad (-5$ 不合$)$　　(2)$(0.25)^{-3} = x \quad \therefore x = 4^3 = 64$

13、求(1)$3^{\log_9 4} =$______。(2)$4^{\frac{1}{2}\log_2 5} + 9^{-2\log_3 \sqrt{5}} =$______。

(3)$3^{\log_9(\log 25)} \times 3^{\log_9(\log_5 10)} =$______。

答案：(1) 2　(2)$\frac{126}{25}$　(3)$\sqrt{2}$

解析：(1)$3^{\log_9 4} = 4^{\log_9 3} = 4^{\frac{1}{2}} = 2$

(2)$4^{\frac{1}{2}\log_2 5} + 9^{-2\log_3 \sqrt{5}} = \sqrt{5}^{\log_2 4} + (\frac{1}{5})^{\log_3 9} = 5 + \frac{1}{25} = \frac{126}{25}$

(3)$3^{\log_9(\log 25 \cdot \log_5 10)} = 3^{\log_9 2} = 2^{\log_9 3} = \sqrt{2}$

15、(1)$\log_2 5 \cdot \log_{25} 7 \cdot \log_{49} 8 =$______。(2)$\frac{\log_4 3}{\log_2 27} =$______。

(3)$\log_8 10 \cdot \log_{10} 12 \cdot \log_{12} 14 \cdot \log_{14} 16 =$______。

答案：(1)$\frac{3}{4}$　(2)$\frac{1}{6}$　(3)$\frac{4}{3}$

解析：(1)$\frac{\log 5}{\log 2} \times \frac{\log 7}{2\log 5} \times \frac{3\log 2}{2\log 7} = \frac{3}{4}$　　(2)$\frac{\log 3}{2\log 2} \times \frac{\log 2}{3\log 3} = \frac{1}{6}$

(3)$\frac{\log 10}{\log 8} \times \frac{\log 12}{\log 10} \times \frac{\log 14}{\log 12} \times \frac{\log 16}{\log 14} = \frac{4\log 2}{3\log 2} = \frac{4}{3}$

16、化簡$\log_3 15 \cdot \log_5 15 - \log_5 3 - \log_3 5 =$______。

答案：2

解析：$(1 + \log_3 5)(1 + \log_5 3) - \log_5 3 - \log_3 5 = 1 + \log_3 5 \log_5 3 = 2$

17、(1)化簡$\log_3(\frac{5}{4}) + 2\log_3(\frac{6}{5}) + \log_3 5 =$______。

(2)化簡$(\log_2 5 + \log_{0.25} 0.2)(\log_{25} 2 + \log_{0.2} 8) =$______。

答案：(1) 2　(2)$-\frac{15}{4}$

解析：(1)$\log_3 \frac{5}{4} + 2\log_3 \frac{6}{5} + \log_3 5 = \log_3 \frac{5}{4} \times (\frac{6}{5})^2 \times 5 = \log_3 9 = 2$

(2)$(\log_2 5 + \log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{5}) \times (\log_{5^2} 2 + \log_{\frac{1}{5}} 2^3) = (\log_2 5 + \frac{1}{2}\log_2 5) \times (\frac{1}{2}\log_5 2 - \frac{3}{1}\log_5 2)$

$= \frac{3}{2}\log_2 5 \times (-\frac{5}{2})\log_5 2 = -\frac{15}{4}$

18、設正數a, b, x, y均不為 1，若$\log_a x + \log_b y = 2$，$\log_x a + \log_y b = -2$，則

$(\log_a x)^2+(\log_b y)^2=$______。

答案：6

解析：令$\log_a x=A$，$\log_b y=B$　$\therefore A+B=2$，$\frac{1}{A}+\frac{1}{B}=-2$　故$AB=-1$　$A^2+B^2=6$

四. 計算與證明題 (每題 10 分)

1、求解下列方程式：

(1) $\log_{81} x=\frac{1}{4}$　(2) $\log_x 25=2$　(3) $\log_{0.2} x=-2$　(4) $\log_x \sqrt{3}=\frac{1}{4}$

答案：(1) $\log_{81} x=\frac{1}{4}\Rightarrow x=81^{\frac{1}{4}}=3$

(2) $\log_x 25=2\Rightarrow x^2=25=5^2\ \ \Rightarrow x=5$

(3) $\log_{0.2} x=-2\Rightarrow x=(0.2)^{-2}=(\frac{1}{5})^{-2}=5^2=25$

(4) $\log_x \sqrt{3}=\frac{1}{4}\Rightarrow x^{\frac{1}{4}}=\sqrt{3}\ \ \Rightarrow x=(\sqrt{3})^4=9$

2、設$a=\log\frac{16}{3}$，$b=\log\frac{81}{4}$，試以a, b表示(1)$\log 2=$？，$\log 3=$？ (2)$\log_8 54=$？

答案：$a=4\log 2-\log 3$，$b=4\log 3-2\log 2$

(1)$\log 2=\frac{4a+b}{14}$，$\log 3=\frac{a+2b}{7}$

(2)$\log_8 54=\frac{\log 2+3\log 3}{3\log 2}=\frac{(\frac{4a+b}{14})+3(\frac{a+2b}{7})}{3\times(\frac{4a+b}{14})}=\frac{10a+13b}{12a+3b}$

3、設$f(x)=\log_{x+3}(x^2-1)$有意義，則x的範圍爲何？

答案：$f(x)=\log_{x+3}(x^2-1)$有意義　$\therefore x^2-1>0$且$x+3>0$且$x+3\neq 1$

$\therefore -3<x<-1$或$x>1$且$x\neq -2$　$\therefore -3<x<-2$或$-2<x<-1$或$x>1$

4、設$\log_{10} 2=u$，$\log_{10} 3=v$，試用u與v表達出下列各式：

(1) $\log_{10} 75$　(2) $\log_{10}(\frac{1}{81})$　(3) $\log_{10} 0.48$

(4) $\log_{10}(\frac{9}{\sqrt[3]{36}})$　(5) $\log_{10}(\sqrt{18}\times 9)$

答案：(1) $\log_{10} 75=\log_{10}(3\times 5^2)=\log_{10} 3+2\log_{10} 5$

$=\log_{10} 3+2\log_{10}\frac{10}{2}=\log_{10} 3+2(\log_{10} 10-\log_{10} 2)\ \ =v+2(1-u)$

(2) $\log_{10}(\frac{1}{81})=\log_{10} 3^{-4}=-4\log_{10} 3=-4v$

(3) $\log_{10} 0.48=\log_{10}\frac{48}{100}=\log_{10} 48-\log_{10} 10^2\ \ =\log_{10} 2^4\cdot 3-2$

$=4\log_{10} 2+\log_{10} 3-2\ \ =4u+v-2$

(4) $\log_{10}(\frac{9}{\sqrt[3]{36}})=\log_{10} 9-\log_{10}\sqrt[3]{36}$

$= \log_{10} 3^2 - \frac{2}{3}\log_{10} 6 = 2\log_{10} 3 - \frac{2}{3}(\log_{10} 2 + \log_{10} 3) \quad = 2v - \frac{2}{3}(u+v) = \frac{4}{3}v - \frac{2}{3}u$

(5) $\log_{10}(\sqrt{18}\times 9) = \log_{10}\sqrt{18} + \log_{10} 9$

$= \frac{1}{2}\log_{10} 2\cdot 3^2 + \log_{10} 3^2 \quad = \frac{1}{2}(\log_{10} 2 + 2\log_{10} 3) + 2\log_{10} 3 \quad = \frac{1}{2}(u+2v) + 2v$

$= \frac{1}{2}u + 3v$