高雄市明誠中學　高一數學平時測驗　　日期：92.03.05					
範圍	1-2 指數函數、圖形 +Ans	班級		姓名	
		座號			

一. 填充題 (每題 10 分)

1、(1)設 $x\in\mathbf{R}$，令 $t=2^x+2^{-x}$，則 t 的範圍為______。

(2)設 $y=f(x)=(4^x+4^{-x})-3(2^x+2^{-x})+1$ 之最小值為______。

答案：(1) $t\ge 2$　(2) -3

解析：(1) $t=2^x+2^{-x}$，$\dfrac{2^x+\frac{1}{2^x}}{2}\ge\sqrt{2^x\cdot\frac{1}{2^x}}=\sqrt{1}=1$　$\therefore t\ge 2$

(2) $y=(t^2-2)-3t+1=t^2-3t-1=(t-\frac{3}{2})^2-\frac{13}{4}$　但 $t\ge 2$　$\therefore y$ 之最小值為 -3

2、解方程式 $2(4^x+4^{-x})-(2^x+2^{-x})-6=0$，則 $x=$______。

答案：± 1

解析：令 $t=2^x+2^{-x}$　$\therefore t^2=4^x+4^{-x}+2$　$\therefore 2(t^2-2)-t-6=0$

$\therefore t=\frac{5}{2}$ 或 $t=-2$ (不合) ($\because 2^x+2^{-x}\ge 2$)

$2^x+2^{-x}=\frac{5}{2}$　令 $k=2^x$　$\therefore k+\frac{1}{k}=\frac{5}{2}$　$\therefore k=2$ 或 $\frac{1}{2}$

由 $2^x=2$，知 $x=1$；由 $2^x=\frac{1}{2}$，知 $x=-1$　故 $x=\pm 1$

3、解方程式

(1) $(\frac{1}{32})^x=4$，則 $x=$______。　(2) $5^x=7^x$，則 $x=$______。

(3) $2^x+2^{1-x}=3$，則 $x=$______。

答案：(1) $-\frac{2}{5}$　(2)0　(3)0 或 1

解析：(1) $\because 2^{-5x}=2^2$　$\therefore x=-0.4=-\frac{2}{5}$

(2) $\because 5^x=7^x$　$\therefore x=0$

(3) $\because 2^x+2^{1-x}=3$，令 $t=2^x$，$t+\frac{2}{t}=3$，$\therefore t^2-3t+2=0$

故 $t=1$ 或 2，即 $x=0$ 或 1

4、某次實驗中培養細菌數目，1 日後增加 a 倍，且已知 3 日後細菌數為 10^6 個，$4\frac{1}{2}$ 日後其細菌數為 8×10^6 個，則(1) $a=$______，(2)5 日後細菌數為______個，(3)原有細菌數為______，(4)______日後，可使細菌數達到 1.024×10^9 個。

答案：(1) 3　(2) 1.6×10^7　(3) 5^6　(4) 8

解析：因 1 日後增加 a 倍，故總數為 $a+1$ 倍，設原有細菌 k 個，則

$k\cdot(a+1)^3=10^6$ 且 $k\cdot(a+1)^{\frac{9}{2}}=8\times10^6$ 故 $(a+1)^{\frac{3}{2}}=8$，$a+1=4$，$a=3$，$k=\frac{10^6}{4^3}=5^6$

5 日後細菌數 $10^6\times4^2=1.6\times10^7$ 個，原有細菌數為 5^6 個，8 日後可到達 1.024×10^9 個。

5、解方程式

(1) $3^{6-x}=243$，則 $x=$______。(2) $5^{2x}-4\cdot 5^{x}-5=0$，則 $x=$______。

(3) $3^{1+x}-28\times 3^{\frac{x}{2}-1}+1=0$，則 $x=$______。

答案：(1)1　(2)1　(3)2 或–4

解析：(1) $3^{6-x}=3^{5}$　$\therefore x=1$

(2)令 $5^{x}=t$, $t^{2}-4t-5=0$, $t=5$ 或–1(不合)　$\therefore x=1$

(3)令 $3^{\frac{x}{2}}=t$, $3t^{2}-\dfrac{28}{3}t+1=0$　$\therefore t=\dfrac{1}{9}$ 或 3　$\therefore x=2$ 或–4

6、設 $a^{x}+a^{-x}=3$，則 $a^{2x}+a^{-2x}=$______, $a^{3x}+a^{-3x}=$______, $a^{x}-a^{-x}=$______,

$a^{x}=$______。

答案：7, 18, $\pm\sqrt{5}$, $\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

解析：$a^{x}+a^{-x}=3$　$\therefore a^{2x}+2+a^{-2x}=9$　$\therefore a^{2x}+a^{-2x}=7$

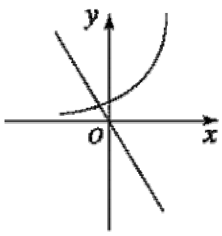
$a^{3x}+a^{-3x}=(a^{x}+a^{-x})(a^{2x}-1+a^{-2x})=18$

$a^{2x}-2+a^{-2x}=5$　$\therefore a^{x}-a^{-x}=\pm\sqrt{5}$　故 $a^{x}=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

7、求方程式 $3^{x}+2x=0$ 有______個相異實根。

答案：1

解析：

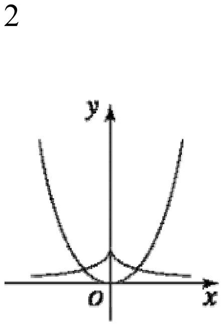


$\begin{cases} y=3^{x} \\ y=-2x \end{cases}$ 之圖形　恰交於一點，故有 1 個相異實根。

8、求方程式 $2x^{2}=2^{-|x|}$ 有______個相異實根。

答案：2

解析：



$\begin{cases} y=2x^{2} \\ y=2^{-|x|} \end{cases}$ 之圖形有 2 個相異實根。

9、解不等式

(1) $(\frac{1}{16})^x+(\frac{1}{4})^x>6$，則其解爲______。

(2) $10^{x^2-3x}\geq 0.01$，則其解爲______。

答案：(1) $x<-\frac{1}{2}$　　(2) $x\geq 2$ 或 $x\leq 1$

解析：(1)令 $t=(\frac{1}{4})^x$　$\therefore t^2+t>6$　$\therefore t>2$ 或 $t<-3$ (不合)

$\therefore (\frac{1}{4})^x>2$，$-2x>1$　$\therefore x<-\frac{1}{2}$

(2) $10^{x^2-3x}\geq 10^{-2}$　$\therefore x^2-3x\geq -2\Rightarrow x\geq 2$ 或 $x\leq 1$

10、某放射性物質重 80 g，半衰期爲 $\frac{1}{3}$ 秒，問 2 秒後剩下______公克。

答案：$\frac{5}{4}$

解析：$2\div(\frac{1}{3})=6$　$\therefore 80\times(\frac{1}{2})^6=\frac{5}{4}$ (g)

11、某次實驗中培養細菌數目，1 日後增加 a 倍且已知 3 日後細菌數爲 10^6 個，$4\frac{1}{2}$ 日後其細菌數爲 8×10^6 個，則(1) $a=$______，(2)______日後，可使細菌達到 1.024×10^9 個。

答案：(1)3　(2)8

解析：(1)1 日後增加 a 倍　∴增加爲 $a+1$ 倍，設原有細菌 k 個

$\therefore k\cdot(a+1)^3=10^6$ 且 $k(a+1)^{\frac{9}{2}}=8\times10^6$　$\therefore (a+1)^{\frac{3}{2}}=8$　$\therefore a+1=4$　$\therefore a=3$

(2)又 $k\times(a+1)^n=1.024\times10^9=1024\times k(a+1)^3$　$\therefore 4^n=4^5\times(4)^3$　$\therefore n=8$

12、解不等式

(1)若 $(0.5)^{x^2-2x}>0.125$，則其解爲______。 (2)若 $3^{2x+1}\leq 3^x+2$，則其解爲______。

答案：(1) $-1<x<3$　(2) $x\leq 0$

解析：(1) $(0.5)^{x^2-2x}>(0.5)^3$　$\therefore x^2-2x<3$，$(x-3)(x+1)<0$　即 $-1<x<3$

(2) $3\cdot(3^x)^2\leq 3^x+2$，令 $t=3^x$，得 $3t^2-t-2\leq 0$，$(3t+2)(t-1)\leq 0$　$\therefore -\frac{2}{3}\leq t\leq 1$

又 $t>0$　$\therefore 0<3^x\leq 1$　$\therefore x\leq 0$

二. 計算與證明題 (每題 10 分)

1、$0\leq x\leq 1$，則函數 $f(x)=3^{x+1}-9^x$ 之最大值爲何？最小值爲何？

答案：$0\leq x\leq 1$　$\therefore 1\leq 3^x\leq 3$，令 $t=3^x$　$\therefore 1\leq t\leq 3$

$f(x)=3^{x+1}-9^x=3t-t^2=-(t-\frac{3}{2})^2+\frac{9}{4}$　$\therefore f(x)$ 之最大值爲 $\frac{9}{4}$；最小值 0。

2、設 $x>0$，解 $x^{3x^3-7x^2}>x^{7x-3}$。

答案：(1)若 $x>1$，則 $3x^3-7x^2>7x-3$　$\therefore 3x^3-7x^2-7x+3>0$

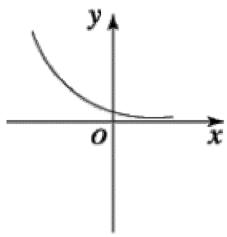
$\therefore (x+1)(3x-1)(x-3)>0$　$\therefore x>3$ 或 $-1<x<\frac{1}{3}\Rightarrow x>3$

(2)若 $0<x<1$，則 $3x^3-7x^2<7x-3$　$\therefore x<-1$ 或 $\frac{1}{3}<x<3\Rightarrow \frac{1}{3}<x<1$

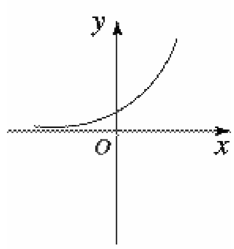
故 $x>3$ 或 $\frac{1}{3}<x<1$

三. 配合題 (每題 10 分)

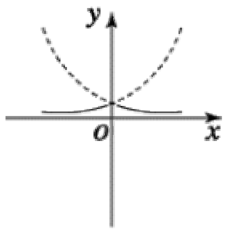
1、



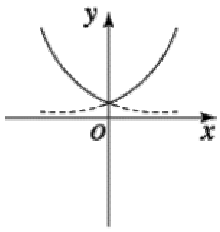
圖(一)



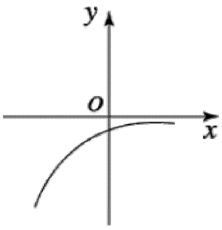
圖(二)



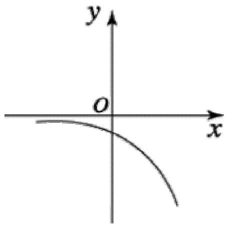
圖(三)



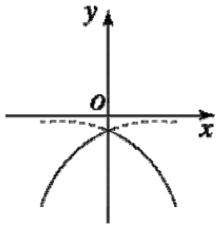
圖(四)



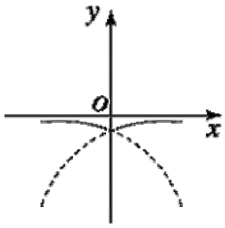
圖(五)



圖(六)



圖(七)



圖(八)

設 $y=a^x$ 之圖形為圖(二)，則

(1) $y=a^{-x}$ 之圖形為______。　(2) $y=-a^x$ 之圖形為______。

(3) $y=-a^{|x|}$ 之圖形為______。　(4) $y=(\frac{1}{a})^{|x|}$ 之圖形為______。

答案：

(1)圖(一)　(2)圖(六)　(3)圖(七)　(4)圖(三)

解析：

(1)設 $y=a^x$ 之圖形為圖(二)　$\therefore a>1$

$\therefore y=a^{-x}$ 之圖形為圖(一)

(2) $y=-a^x$ 之圖形為圖(六)

(3) $y=-a^{|x|}$ 之圖形，當 $x>0$ 時 $y=-a^x$，當 $x<0$ 時 $y=-a^{-x}$

$\therefore y=-a^{|x|}$ 之圖形為圖(七)

(4) $y=(\frac{1}{a})^{|x|}$ 之圖形，當 $x>0$ 時 $y=(\frac{1}{a})^x$，當 $x<0$ 時 $y=(\frac{1}{a})^{-x}$

$\therefore y=(\frac{1}{a})^{|x|}$ 之圖形為圖(三)