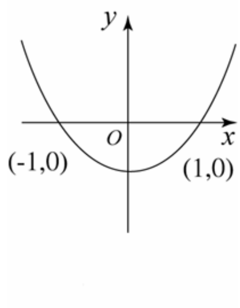
| 高雄市明誠中學 高一數學平時測驗 日期：93.02.16 | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 範圍 | 4-4,5,6 多項<br>函數、方程式、不等式 | 班級 | | 姓名 | |
| | | 座號 | | | |

一. 單一選擇題 (每題 8 分)




1、( A ) 設 $y=ax^2+bx+c$ 之圖形如下，則下列那一項確定成立？

(A) $\frac{1}{4}a+\frac{1}{2}b+c<0$ (B) $b>0$ (C) $a<0$ (D) $b^2-4ac=0$

(E) $4a-2b+c<0$。

答案：( A )

解析：由圖知 $y=ax^2+bx+c$ 頂點 $(0,k)$， $k<0$

(A) $x=\frac{1}{2}\Rightarrow y=\frac{1}{4}a+\frac{1}{2}b+c<0$

(B)開口向上 $a>0$ ；

(C)頂點 $x=-\frac{b}{2a}=0\Rightarrow b=0$

(D)圖形與 $x$ 軸交於兩點 $b^2-4ac>0$

(E) $x=2\Rightarrow y=4a-2b+c>0$。

2、( C ) 設 $\alpha,\beta,\gamma$ 為 $x^3+x^2-4x+5=0$ 的三根，則以下何者錯誤？

(A) $\alpha+\beta+\gamma=-1$ (B) $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-4$ (C) $\alpha\beta\gamma=5$ (D) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=9$

(E) $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=-28$ 。

答案：( C )

解析：維塔-根與係數定理：

$$ax^3+bx^2+cx+d=0\text{ 三根為 }\alpha,\beta,\gamma\Rightarrow\begin{cases}(1)\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a}\\(2)\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a}\\(3)\alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}\end{cases}$$

(A)(B)(C) $x^3+x^2-4x+5=0\Rightarrow\begin{cases}(1)\alpha+\beta+\gamma=-1\\(2)\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-4\\(3)\alpha\beta\gamma=-5\end{cases}$

(D) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)=(-1)^2-2(-4)=9$

(E) $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=(\alpha+\beta+\gamma)[\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)]+3\alpha\beta\gamma$

$=(-1)[9-(-4)]+3\cdot(-5)=-28$

3、( A ) 方程式 $x^5-4x^3+7x^2-x+11=0$ 在 (A) $-3$ 與 $-2$ 之間 (B) $-2$ 與 $-1$ 之間

(C) $-1$ 與 0 之間 (D) 0 與 1 之間 (E) 1 與 2 之間 有實根

答案：( A )

解析：設 $f(x) = x^5 - 4x^3 + 7x^2 - x + 11$

| | 係數 | 正負 | 相間 | 無正 | 根 | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $-3$ | $+5$ | $-8$ | $+23$ | $-58$ | $-3$ |
| 1 | $-2$ | $+0$ | $+7$ | $-15$ | $+41$ | $-2$ |
| 1 | $-1$ | $-3$ | $+10$ | $-11$ | $+22$ | $-1$ |
| 1 | $+0$ | $-4$ | $+7$ | $-1$ | $+11$ | 0 |
| 1 | $+1$ | $-3$ | $+4$ | $+3$ | $+14$ | 1 |
| 1 | $+2$ | $+0$ | $+7$ | $+13$ | $+37$ | 2 |
| | 係數 | 皆正 | 無正 | 根 | | |

4、( B ) 下列那一個不等式，其解集合非「無解」？ (A) $x^2 + 6x + 10 < 0$
(B) $x^2 + 2x \le -1$ (C) $-x^2 + 8x > 16$ (D) $-x^2 + 3x - 5 \ge 0$ (E) $-2x^2 + x > 5$。

答案：( B )

解析：(A) $6^2 - 4\times1\times10 = -4 < 0 \Rightarrow x^2 + 6x + 10 > 0$ 恆成立，$x^2 + 6x + 10 < 0$ 無解
(B) $x^2 + 2x \le -1 \Rightarrow (x+1)^2 \le 0$，解爲 $x = -1$
(C) $-x^2 + 8x > 16 \Rightarrow x^2 - 8x + 16 < 0 \Rightarrow (x-4)^2 < 0$ 無解
(D) $-x^2 + 3x - 5 \ge 0 \Rightarrow x^2 - 3x + 5 \le 0$，$\because x^2 - 3x + 5 > 0$ 恆成立 $\Rightarrow x^2 - 3x + 5 \le 0$ 無解
(E) $-2x^2 + x > 5 \Rightarrow 2x^2 - x + 5 < 0$，$\because 2x^2 - x + 5 > 0$ 恆成立 $\Rightarrow 2x^2 - x + 5 < 0$ 無解

5、( D ) 解不等式 $(x-1)(x-2)^2(x-3)^3 \ge 0$ 之解爲 (A) $x \ge 3$ 或 $2 \ge x \ge 1$ (B) $x \ge 3$ 或 $x \le 1$
(C) $1 \le x \le 3$ (D) $x \ge 3$ 或 $x = 2$ 或 $x \le 1$ (E) $3 \ge x \ge 2$ 或 $x \le 1$。

答案：( D )

解析：$(x-1)(x-2)^2(x-3)^3 \ge 0 \Rightarrow (x-1)(x-2)^2(x-3) \ge 0 \Rightarrow x \le 1$ 或 $x \ge 3$ 或 $x = 2$

## 二. 填充題 (每題 10 分)

1、 $f(x)$ 爲一實係數，$n$ 次多項式，若 $f(2-i) = 4i - 7$，則 $f(2+i) =$ ______ 。

答案：$-4i - 7$

解析：$f(\overline{z}) = \overline{f(z)} \Rightarrow f(2+i) = f(\overline{2-i}) = \overline{f(2-i)} = \overline{4i-7} = -4i - 7$

2、設 $f(x) = -x^2 + (a+1)x + 2,\ a \in \mathbf{R}$，若方程式 $f(x) = 0$。有一根在 $-1$ 與 0 之間，另一根在 2 與 3 之間則 $a$ 的範圍爲______________。

答案：$0 < a < \dfrac{4}{3}$

有根在 $-1$ 與 0 之間 $\Rightarrow f(-1)f(0) < 0$，即
$(-1 - a - 1 + 2)(-0 + 0 + 2) < 0 \Rightarrow -a < 0 \Rightarrow a > 0$ …..①
另一根在 2 與 3 之間 $\Rightarrow f(2)f(3) < 0$，即
$(-4 + 2a + 2 + 2)(-9 + 3a + 3 + 2) < 0 \Rightarrow a(3a-4) < 0 \Rightarrow 0 < a < \dfrac{4}{3}$ ………. ②
由.① ② 知 $0 < a < \dfrac{4}{3}$

3、求二次函數 $y=5-(2x-1)(x-2)$ 的極值；在 $x=$________時，$y=$________爲_______(最大值或最小值)。

答案：$x=\dfrac{5}{4}\Rightarrow y=\dfrac{49}{8}$ 最大

解析：

$$y=5-(2x-1)(x-2)\Rightarrow y=-2x^2+5x+3=-2(x-\frac{5}{4})^2+\frac{49}{8}\text{，}\ when\ \ x=\frac{5}{4}\Rightarrow y=\frac{49}{8}\text{最大}$$

4、設二次函數 $y=f(x)=ax^2+2bx+\dfrac{4}{b}$ 在 $x=1$ 時有最大值 5，則數對 $(a,b)=$______或______。

答案：$(-1,1);(-4,4)$

解析：$y=f(x)=ax^2+2bx+\dfrac{4}{b}$ 在 $x=1$ 時有最大值 5

$$y=a(x-1)^2+5\Rightarrow y=ax^2-2ax+a+5$$

$$\Rightarrow\begin{cases}2b=-2a\\ \dfrac{4}{b}=a+5\end{cases}\Rightarrow a^2+5a+4=0\Rightarrow(a+1)(a+4)=0\Rightarrow a=-1,-4$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a=-1,-4\\ b=1,4\end{cases}\Rightarrow(a,b)=(-1,1);(-4,4)$$

5、 設 $y=x^2-2x-5$ 與 $y=2x-1$ 兩圖形交於 $A,B$ 兩點，則 $\overline{AB}$ 之長爲_______ 。

答案：$4\sqrt{10}$

解析：$\begin{cases}y=x^2-2x-5\\ y=2x-1\end{cases}\Rightarrow x^2-2x-5=2x-1\Rightarrow x^2-4x-4=0$

設兩交點 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，則 $x_1,x_2$ 爲 $x^2-4x-4=0$ 之二根，且 $\begin{cases}x_1+x_2=4\\ x_1\cdot x_2=-4\\ y_1=2x_1-1\\ y_2=2x_2-1\\ y_1-y_2=2(x_1-x_2)\end{cases}$

$$\Rightarrow\overline{AB}=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\sqrt{5(x_1-x_2)^2}=\sqrt{5[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2]}$$

$$=\sqrt{5[4^2-4(-4)]}=4\sqrt{10}$$

6、解不等式 (1)$x^2+x-6<0$，其解爲______________________，

(2)$2x^2-3x+2<0$，其解爲____________________，

(3)$2x^2+x-2\geq 0$，其解爲_____________________，

(4)$6x^3+7x^2-9x+2>0$，其解爲_______________。

答案：(1)$-3<x<2$ (2)無解 (3)$x\geq\dfrac{-1+\sqrt{17}}{4};x\leq\dfrac{-1-\sqrt{17}}{4}$ (4)$-2<x<\dfrac{1}{3}$ 或 $x>\dfrac{1}{2}$

解析：

(1) $x^2+x-6<0 \Rightarrow (x-2)(x+3)<0 \Rightarrow -3<x<2$

(2) $D=(-3)^2-4\times 2\times 2=-7<0 \Rightarrow 2x^2-3x+2>0$ 恆成立，$2x^2-3x+2<0$ 無解

(3) $2x^2+x-2=0 \Rightarrow x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1-4\times 2\times(-2)}}{4}$ ，

$2x^2+x-2\ge 0 \Rightarrow x\ge \dfrac{-1+\sqrt{17}}{4};\quad x\le \dfrac{-1-\sqrt{17}}{4}$

(4) $6x^3+7x^2-9x+2>0 \Rightarrow (x+2)(2x-1)(3x-1)>0 \Rightarrow -2<x<\dfrac{1}{3}$ 或 $x>\dfrac{1}{2}$

7、解不等式 $\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+5x+4}>1$，其解爲____________________。

答案：$-1<x<-\dfrac{1}{4}$ 或 $x<-4$

解析：$\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+5x+4}>1 \Rightarrow \dfrac{x^2-3x+2}{x^2+5x+4}-1>0 \Rightarrow \dfrac{(x^2-3x+2)-(x^2+5x+4)}{x^2+5x+4}>0$

$\dfrac{-8x-2}{x^2+5x+4}>0 \Rightarrow \dfrac{4x+1}{(x+1)(x+4)}<0$

$\Rightarrow (4x+1)(x+1)(x+4)<0$ 且 $(x+1)(x+4)\ne 0 \Rightarrow -1<x<-\dfrac{1}{4}$ 或 $x<-4$

## 三. 計算題 (每題 10 分)

1、若對於一切實數 $x$，恆有 $ax^2+3x+(a+4)<0$ 則實數 $a$ 的範圍爲何？

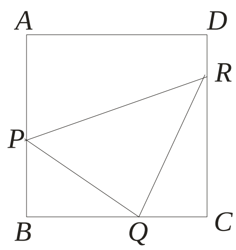
解析：

對於一切實數 $x$，恆有 $ax^2+3x+(a+4)<0 \Rightarrow \begin{cases} a<0 \\ 3^2-4a(a+4)<0 \end{cases}$

$3^2-4a(a+4)<0 \Rightarrow 4a^2+16a-9>0 \Rightarrow (2a-1)(2a+9)>0 \Rightarrow a>\dfrac{1}{2};\quad a<-\dfrac{9}{2}$

$\therefore a<-\dfrac{9}{2}$

2、在邊長爲 1 的正方形 $ABCD$ 的三邊 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ 上各取一點 $P, Q, R$，使 $2\overline{AP}=2\overline{BQ}=\overline{CR}$ ，試求△$PQR$ 的最小面積。




解析：設 $2\overline{AP}=2\overline{BQ}=\overline{CR}=2x \Rightarrow \overline{AP}=\overline{BQ}=x, \overline{CR}=2x$

$\overline{BP}=1-x, \overline{CQ}=1-x, \overline{DR}=1-2x$

$\Delta PQR=$ 正方形 $ABCD$ 面積 $-\Delta PBQ-\Delta PCQ-$ 梯形 $APRD$ 面積

$=1^2-\dfrac{1}{2}(1-x)x-\dfrac{1}{2}(1-x)\cdot 2x-\dfrac{x+(1-2x)}{2}\cdot 1$

$=\dfrac{3}{2}(x-\dfrac{1}{3})^2+\dfrac{1}{3}$ ，當 $x=\dfrac{1}{3}, \Delta PQR=\dfrac{1}{3}$ 面積最小

3、求最低次有理係數方程式使此方程式含有 $1, -1+\sqrt{3}$ 與 $2-i$ 這三個根。則　此方程式爲 _____________ 。

解析：

$$x=-1+\sqrt{3}\Rightarrow (x+1)^2=(\sqrt{3})^2\Rightarrow x^2+2x-2=0$$
$$x=2-i\Rightarrow (x-2)^2=(i)^2\Rightarrow x^2-4x+5=0$$
$$(x-1)(x^2+2x-2)(x^2-4x+5)=0$$