高雄市明誠中學 高一數學平時測驗 日期：93.01.07					
範圍	HCF、LCM+Ans	班級		姓名	
		座號			

一、 複選題 (每題 8 分)

1. a，b，c，k皆為整數，若$x+k$為x^2+ax-6與x^3+bx^2+cx+3的公因式，則k值可為

(A) 1 (B) -1 (C) 2 (D) 3 (E) 6

Ans： (A)(B)(D)

解析：

a，b，c，$k\in Z$，$x+k\mid x^2+ax-6$ 且$x+k\mid x^3+bx^2+cx+3$

$\Rightarrow\ k\mid 6$ 且$k\mid 3 \ \Rightarrow\ k\mid 3\ \Rightarrow\ k=\pm 1$，$\pm 3$

2. 設 $\deg f(x)=5$，$\deg g(x)=3$，則下列敘述何者正確？

(A) $\deg$ (HCF) $\le \deg$ (LCM) (B) $\deg$ (HCF) $+\deg$ (LCM) $=8$

(C) $\deg$ (HCF) 最大是 3 (D) $\deg$ (LCM) 最小是 5

(E) $\deg$ (LCM) 最大是 7

Ans：(A)(B)(C) (D)

解析：

(A)∵ HCF | LCM ∴ $\deg$ (HCF) $\le \deg$ (LCM)

(B)∵ $\deg f(x)+\deg g(x)=\deg$ (HCF) $+\deg$ (LCM) $=8$

(C)(D) $\deg$ (HCF)最大 $=\deg f(x)$ ，$\deg g(x)$中之較小者 $\Leftrightarrow$ $\deg$ (LCM)最小

(E) $\deg$ (LCM)最大 $=\deg f(x)+\deg g(x)=8$

二、 填充題(每題 10 分)

1. $f(x)=x^{50}-x^{48}-2x^2+2$，$g(x)=x^{48}+3x^2-4$，則$f(x)$，$g(x)$之H.C.F為__________。

Ans： x^2-1

解析：

考慮$f(x)-x^2\cdot g(x)=-x^{48}-3x^4-2x^2+4x^2+2=-x^{48}-3x^4+2x^2+2$

令$h(x)=-x^{48}-3x^4+2x^2+2$

考慮$g(x)+h(x)=-3x^4+5x^2-2=-(x^2-1)(3x^2-2)$

但 $3x^2-2$ 不是$f(x)$，$g(x)$之H.C.F（∵ $f(x)$，$g(x)$之最高次數係數為 1）

∴ H.C.F $=x^2-1$

2. 設a為整數，若$f(x)=x^3+x^2-4x+(a-7)$與$g(x)=2x^3-7x^2+7x+(2a-8)$的最高公因式為一次式，則a的值為__________。

Ans：3

解析：

已知$f(x)=x^3+x^2-4x+(a-7)$與$g(x)=2x^3-7x^2+7x+(2a-8)$之HCF為一次式，

設為$d(x)$，則 $d(x)\mid 2f(x)-g(x)\ \Rightarrow\ d(x)\mid 3(3x^2-5x-2)\Rightarrow\ d(x)\mid 3(x-2)(3x+1)$

∴ $d(x)=x-2$，或$d(x)=3x+1$

(1)若$d(x)=x-2$，則$x-2\mid f(x)$ $\Rightarrow$ $f(2)=0$ $\Rightarrow$ $8+4-8+(a-7)=0\Rightarrow$ $a=3$

(2)若$d(x)=3x+1$，則 $3x+1\mid f(x)$ $\Rightarrow$ $f(\frac{-1}{3})=0$

$\Rightarrow$ $\frac{-1}{27}+\frac{1}{9}+\frac{4}{3}+a-7=0$ $\Rightarrow$ $a=\frac{151}{27}$，非整數，不合

故所求a之值爲 3

3. 已知二多項式x^3+ax^2+2x+4 與 $2x^3+x^2+a^2x+2$ 有一個二次公因式，則a的值爲______。

Ans： 2

解析：

設$f(x)=x^3+ax^2+2x+4$，$g(x)=2x^3+x^2+a^2x+2$

已知$f(x)$與$g(x)$有一個二次公因式，設爲$d(x)$，則

$d(x)\mid 2f(x)-g(x)\Rightarrow$ $d(x)\mid(2a-1)x^2+(4-a^2)x+6$……①

又$d(x)\mid f(x)-2g(x)\Rightarrow$ $d(x)\mid -x\,[3x^2+(2-a)x+2(a^2-1)]$

因x非$f(x)$與$g(x)$的因式，所以$d(x)\mid 3x^2+(2-a)x+2(a^2-1)$……②

由①，②知$\frac{2a-1}{3}=\frac{4-a^2}{2-a}=\frac{6}{2(a^2-1)}$

若$a=2$，則$\frac{2a-1}{3}=1$，$\frac{6}{2(a^2-1)}=\frac{3}{3}=1$，$\therefore$ $a=2$ 爲其解

若$a\neq 2$，則$\frac{2a-1}{3}=\frac{2+a}{1}=\frac{3}{a^2-1}\Rightarrow$ $2a-1=6+3a$ $\Rightarrow$ $a=-7$

但 $-5=\frac{2-7}{1}\neq\frac{3}{(-7)^2-1}=\frac{1}{16}$ $\therefore$ $a=-7$ 不合

4. 若$f(x)=x^3+bx^2+cx+1$ 與$g(x)=x^3+cx^2+bx+1$ 有一次最高公因式，則

$b+c=$__________。

Ans： -2

解析：

設$f(x)$，$g(x)$之一次最高公因式爲$d(x)$

則 $d(x)\mid f(x)-g(x)$

$\Rightarrow$ $d(x)\mid(b-c)x^2+(c-b)x$

$\Rightarrow$ $d(x)\mid(b-c)x(x-1)$

若$b=c$，則$f(x)=g(x)=x^3+bx^2+cx+1$ 不合

又$f(0)=1\neq 0$ $\therefore$ $x\nmid f(x)$，故$d(x)=x-1$

$\therefore$ $f(1)=g(1)=0$ $\Rightarrow$ $b+c=-2$

5. 設$d(x)$爲x^3-2x^2-5x+6 與$x^3+k^2x^2-2kx-16$ 之一最高公因式，其中k爲一實數，若$d(x)$爲二次式，則$k=$__________。

Ans： -3

解析：

$f(x)=x^3-2x^2-5x+6=(x-1)(x-3)(x+2)$

$g(x)=x^3+k^2x^2-2kx-16$

設$d(x)=(x-a)(x-b)$爲$f(x)$，$g(x)$之最高公因式

$a<b$　∴　a，b爲 1，3，-2 三者之二

又$a\mid 16$，$b\mid 16$　∴　$a=-2$，$b=1$

$$\begin{cases} g(1)=k^2-2k-15=(k-5)(k+3)=0 \\ g(-2)=4k^2+4k-24=4(k+3)(k-2)=0 \end{cases}$$

∴　$k=-3$

6. 設$f(x)=x^3+ax^2-5x+(a-7)$與$g(x)=x^2+ax-2$ 的HCF爲一次式，則$a=$ ＿＿＿＿＿。（a爲整數）

Ans： 1

解析：

設$f(x)$，$g(x)$的HCF爲$d(x)$

則$d(x)\mid f(x)-xg(x)$　$\Rightarrow$　$d(x)\mid -3x+(a-7)$　$\Rightarrow$　$d(x)\mid -3\left(x-\dfrac{a-7}{3}\right)$

$d(x)\mid g(x)$　$\Rightarrow$　$g\left(\dfrac{a-7}{3}\right)=0$　$\Rightarrow$　$\dfrac{(a-7)^2}{9}+\dfrac{a(a-7)}{3}-2=0$

$\Rightarrow$　$4a^2-35a+31=0$　$\Rightarrow$　$(a-1)(4a-31)=0$

∴　$a=1$ 或$a=\dfrac{31}{4}$，但a爲整數　∴　$a=1$

7. 兩多項式$f(x)=x^3+ax^2-4x+2$ 與$g(x)=x^3+bx^2-2$ 的最高公因式爲二次式，則數對$(a，b)=$ ＿＿＿＿＿。

Ans： (1，3)

解析：

設$f(x)$與$g(x)$的H.C.F爲$d(x)$，則$d(x)\mid f(x)-g(x)$

$\Rightarrow$　$d(x)\mid (x^3+ax^2-4x+2)-(x^3+bx^2-2)$

$\Rightarrow$　$d(x)\mid (a-b)x^2-4x+4\cdots\cdots$①

$d(x)\mid f(x)+g(x)$

$\Rightarrow$　$d(x)\mid (x^3+ax^2-4x+2)+(x^3+bx^2-2)$

$\Rightarrow$　$d(x)\mid 2x^3+(a+b)x^2-4x$

$\Rightarrow$　$d(x)\mid x[2x^2+(a+b)x-4]\cdots\cdots$②

由①，②知$\dfrac{a-b}{2}=\dfrac{-4}{a+b}=\dfrac{4}{-4}$

8. 設$f(x)=x^2-2x-3$，$g(x)=x^3-4x^2+4x-3$，$h(x)=2x^4-5x^3-3x^2+x-3$ 的最高公因式$d(x)$，最低公倍式$m(x)$，則$d(x)=$ ＿＿＿＿＿，$m(x)=$ ＿＿＿＿＿＿＿＿＿。

Ans： $x-3$；$(x-3)(x+1)(x^2-x+1)(2x^2-x+1)$

解析：

$f(x)=(x+1)(x-3)$，$g(x)=(x-3)(x^2-x+1)$，$h(x)=(x+1)(x-3)(2x^2-x+1)$

$\therefore$ $\text{HCF}=d(x)=x-3$

$\text{LCM}=m(x)=(x-3)(x+1)(x^2-x+1)(2x^2-x+1)$

9. a，b，$c\in N$，設x^3+3x^2+ax+2，x^3+4x^2+bx+6的HCF為$x+c$，則 $(a$，b，$c)=$ __________。

Ans： (4，9，1)或(3，7，2)

解析：

利用一次因式檢查法

由$x+c\mid x^3+3x^2+ax+2$，$x+c\mid x^3+4x^2+bx+6$

$\therefore$ $c\mid 2$ 且$c\mid 6$ $\therefore$ $c\mid(2，6)=2$， $\because$ $c\in N$ $\therefore$ $c=1$ 或 2

當$c=1$ 時，$x+1\mid x^3+3x^2+ax+2$ $\therefore$ $a=4$ ，$x+1\mid x^3+4x^2+bx+6$ $\therefore$ $b=9$

當$c=2$ 時，$x+2\mid x^3+3x^2+ax+2$ $\therefore$ $a=3$， $x+2\mid x^3+4x^2+bx+6$ $\therefore$ $b=7$

10. 設c為整數，若$f(x)=x^3+cx^2+x+2$ 與$g(x)=x^2+cx+2$ 的最高公因式為一次式，則 $c=$ __________。

Ans： -3

解析：

設$x-a$為$f(x)$，$g(x)$的最高公因式$\Rightarrow$ $a\mid 2$ $\therefore$ $a=\pm1$，±2

(1) $a=1$：$\begin{cases} f(1)=4+c=0 \\ g(1)=3+c=0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} c=-4 \\ c=-3 \end{cases}$矛盾

(2) $a=-1$：$\begin{cases} f(-1)=c=0 \\ g(-1)=3+c=0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} c=0 \\ c=-3 \end{cases}$矛盾

(3) $a=2$：$\begin{cases} f(2)=12+4c=0 \\ g(2)=6+2c=0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $c=-3$

$f(x)=x^3-3x^2+x+2=(x-2)(x^2-x-1)$

$g(x)=x^3-3x+2=(x-2)(x-1)$

(4) $a=-2$：$\begin{cases} f(-2)=-8+4c=0 \\ g(-2)=6-2c=0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} c=2 \\ c=3 \end{cases}$矛盾

11. a為整數，$f(x)=x^3-x^2+4x+a-7$，$g(x)=2x^3+5x^2-7x+2a-6$，已知$f(x)$和$g(x)$的最高公因式為一次式，求a之值__________。

Ans： 3

解析：

$f(x)=x^3-x^2+4x+a-7$

$g(x)=2x^3+5x^2-7x+2a-6$

設$f(x)$與$g(x)$的最高公因式為$d(x)$

$\therefore$ $d(x)\mid g(x)-2f(x)\Rightarrow$ $d(x)\mid 7x^2-15x+8$ $\Rightarrow$ $d(x)\mid(7x-8)(x-1)$

$\therefore$ $d(x)=7x-8$ 或$x-1$ $\because$ $a\in Z$ $\therefore$ $d(x)=x-1$

因$d(x)\mid f(x)$，$d(x)\mid g(x)$ $\therefore$ $x-1\mid f(x)$，$x-1\mid g(x)\Rightarrow$ $f(1)=0$，$g(1)=0$

$\therefore$ $1-1+4+a-7=0$ $\therefore$ $a=3$

12. 若兩多項式x^2+x+a與x^3+ax+b的HCF爲$x+1$，則LCM爲 __________ 。

Ans： x^4+x

解析：

$x+1\mid x^2+x+a \quad\Rightarrow\quad 1-1+a=0 \quad\Rightarrow\quad a=0$

$x+1\mid x^3+ax+b \quad\Rightarrow\quad x+1\mid x^3+b \quad\Rightarrow\quad -1+b=0 \quad\Rightarrow\quad b=1$

$$\therefore\ \text{LCM}=\frac{(x^2+x)\,(x^3+1)}{x+1}=x\,(x^3+1)=x^4+x$$

13. $f(x)=x^5+2x^4+x^3-2x^2-3x+2$ 與$g(x)=x^4+4x^3-5x+2$ 的最高公因式爲__________。

Ans：. x^2+x-1

解析：輾轉相除法

1	$1+2+1-2-\ 3+2$	$1+4+0-5\ +2$	
	$1+4+0-5+\ 2$		$\times 3$
-2	$-2+1+3-\ 5+2$	$3+12+0-15+6$	1
	$-2-8+0+10-4$	$3+1-5+2$	
	3 | $9+3-15+6$	$11+5-17+6$	3
	$3+1-5+2$	$9+3-15+6$	
3	$3+3-3+0$	2 | $2+2-2+0$	
	$-2\,)\,-2-2+2$	$1+1-1+0$	1
	$+1+1-1$	$1+1-1$	
		$+0+0+0$	

得 $(f(x)，g(x))=x^2+x-1$