

高雄市明誠中學 高一數學平時測驗				日期：93.01.05	
範圍	餘式、因式定理+Ans	班級		姓名	
		座號			

一、複選題 (每題 8 分)

1. 設 $a, b, c \in Z$, 則下列何者不可能是多項式 $f(x) = 2x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 5$ 的因式?

- (A) $x - 1$ (B) $2x - 1$ (C) $x + 2$ (D) $5x - 1$ (E) $3x - 5$ 。

Ans: (C)(D)(E)

解析:

利用一次因式檢查定理

若 $f(x)$ 有 $px - q$ 的因式, $p, q \in Z, p \neq 0, (p, q) = 1$, 則 $p | 2, q | 5$

\therefore 設 $p \nmid 2$ 或 $q \nmid 5$, 則 $f(x)$ 必無 $px - q$ 的因式

$\therefore x + 2, 5x - 1, 3x - 5$ 恆非 $f(x)$ 的因式

2. 設多項式 $f(x)$ 除以 $(x - 1)(x - 2)(x - 3)$ 之餘式為 $2x^2 + x - 7$, 則

- (A) $f(x)$ 除以 $x - 1$ 的餘式為 4 (B) $f(x)$ 除以 $x - 2$ 的餘式為 3
 (C) $f(x)$ 除以 $x - 3$ 的餘式為 14 (D) $f(x)$ 除以 $(x - 1)(x - 2)$ 的餘式為 $7x - 11$
 (E) $f(x)$ 除以 $(x - 2)(x - 3)$ 的餘式為 $11x + 19$ 。

Ans: (B)(C)(D)

解析:

設 $f(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)Q(x) + 2x^2 + x - 7$

(A) $f(x)$ 除以 $x - 1$ 的餘式 = $x - 1$ 除 $2x^2 + x - 7$ 之餘式 = -4

(B) $f(x)$ 除以 $x - 2$ 的餘式 = $x - 2$ 除 $2x^2 + x - 7$ 之餘式 = 3

(C) $f(x)$ 除以 $x - 3$ 的餘式 = $x - 3$ 除 $2x^2 + x - 7$ 之餘式 = 14

(D) $f(x)$ 除以 $(x - 1)(x - 2)$ 的餘式 = $(x - 1)(x - 2)$ 除 $2x^2 + x - 7$ 之餘式 = $7x - 11$

(E) $f(x)$ 除以 $(x - 2)(x - 3)$ 的餘式 = $(x - 2)(x - 3)$ 除 $2x^2 + x - 7$ 之餘式 = $11x - 19$

二、填充題(每題 10 分)

1. a, b 為常數, 若 $2x - 3$ 與 $3x + 1$ 均為 $ax^3 + bx^2 - 47x - 15$ 的因式, 則數對 $(a, b) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

Ans: (24, 2)

解析:

令 $f(x) = ax^3 + bx^2 - 47x - 15$

$$2x - 3 | f(x) \Rightarrow f\left(\frac{3}{2}\right) = 0 \Rightarrow \frac{27}{8}a + \frac{9}{4}b - \frac{141}{2} - 15 = 0 \Rightarrow 3a + 2b = 76 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$3x + 1 | f(x) \Rightarrow f\left(-\frac{1}{3}\right) = 0 \Rightarrow -\frac{1}{27}a + \frac{1}{9}b + \frac{47}{3} - 15 = 0 \Rightarrow -a + 3b = -18 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{2} \times 3 \quad 11b = 76 - 54 = 22 \quad \therefore b = 2 \text{ 代入 } \textcircled{2} \text{ 得 } a = 24$$

2. 設 $f(x) = a(x - 1)(x - 2) + b(x - 2)(x - 3) + c(x - 3)(x - 1)$, 其中 a, b, c 為常數, 若 $f(10) = f(100) = f(1000) = 5$, 則序組 $(a, b, c) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

Ans : $(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, -5)$

解析 :

$$f(x) = a(x-1)(x-2) + b(x-2)(x-3) + c(x-3)(x-1), \deg f(x) \leq 2$$

$$\text{又 } f(10) = f(100) = f(1000) = 5 \quad \therefore f(x) = 5$$

$$\text{即 } a(x-1)(x-2) + b(x-2)(x-3) + c(x-3)(x-1) = 5$$

$$x=3 \text{ 代入得 } 2a=5 \quad \therefore a=\frac{5}{2}$$

$$x=1 \text{ 代入得 } 2b=5 \quad \therefore b=\frac{5}{2}$$

$$x=2 \text{ 代入得 } -c=5 \quad \therefore c=-5$$

$$\therefore (a, b, c) = (\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, -5)$$

3. 設 $f(x)$ 爲一多項式，以 $x-1$ 除之餘 5，以 $x+2$ 除之餘 2，則 $f(x)$ 除以 $(x-1)(x+2)$ 之餘式爲_____。

Ans : $x+4$

解析 :

$$f(x) \text{ 除以 } x-1 \text{ 餘式 } 5 \Rightarrow f(1) = 5$$

$$f(x) \text{ 除以 } x+2 \text{ 餘式 } 2 \Rightarrow f(-2) = 2$$

$$\text{令 } f(x) = (x-1)(x+2)q(x) + ax + b$$

$$\text{則 } f(1) = a + b = 5, f(-2) = -2a + b = 2$$

$$\text{解得 } a = 1, b = 4 \quad \therefore \text{餘式 } ax + b = x + 4$$

4. 設 $f(x) = x^4 + 3x^2 - 2x - 1$ 且 $g(x) = f(2x-3)$ ，則以 $2x-1$ 除 $g(x)$ 所得之餘式爲_____。

Ans : 31

解析 :

$$f(x) = x^4 + 3x^2 - 2x - 1, g(x) = f(2x-3), \text{ 以 } 2x-1 \text{ 除 } g(x) \text{ 所得之餘式爲}$$

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(2 \times \frac{1}{2} - 3\right) = f(-2) = (-2)^4 + 3(-2)^2 - 2(-2) - 1 = 31$$

5. 多項式 $f(x)$ ， $f(x) \div (x-3)$ 之餘式爲 2， $f(x) \div (2x^2 + 5x - 3)$ 之餘式爲 $4x - 1$ ，則

(1) $f(x) \div (2x^2 - 7x + 3)$ 之餘式爲_____，

(2) $f(x) \div (x-3)(2x^2 + 5x - 3)$ 之餘式爲_____。

Ans : (1) $\frac{2}{5}x + \frac{4}{5}$; (2) $-\frac{3}{5}x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{1}{10}$

解析 :

$$f(x) = (2x^2 + 5x - 3)q_1(x) + 4x - 1 = (2x-1)(x+3)q_1(x) + 4x - 1$$

$$\therefore f\left(\frac{1}{2}\right) = 4 \times \frac{1}{2} - 1 = 1$$

$$\text{又 } 2x^2 - 7x + 3 = (2x-1)(x-3)$$

$$\therefore \text{設 } f(x) = (2x-1)(x-3)q_2(x) + a(x-3) + 2, f\left(\frac{1}{2}\right) = a\left(\frac{1}{2}-3\right) + 2 = 1 \Rightarrow a = \frac{2}{5}$$

$$\therefore f(x) \div (2x^2 - 7x + 3) \text{ 的餘式爲 } \frac{2}{5}(x-3) + 2 = \frac{2}{5}x + \frac{4}{5}$$

$$\text{設 } f(x) = (x-3)(2x^2 + 5x - 3)q_3(x) + b(2x^2 + 5x - 3) + 4x - 1$$

$$\therefore f(3) = 2 \Rightarrow b(2 \times 3^2 + 5 \times 3 - 3) + 4 \times 3 - 1 = 2 \Rightarrow 30b + 11 = 2 \therefore b = -\frac{3}{10}$$

$$\text{故 } f(x) \div (x-3)(2x^2 + 5x - 3) \text{ 的餘式爲 } -\frac{3}{10}(2x^2 + 5x - 3) + 4x - 1 = -\frac{3}{5}x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{1}{10}$$

6. 設多項式 $f(x)$ 除以 $x-1$, x^2-2x+3 之餘式依次為 2 , $4x+6$, 則

$f(x)$ 除以 $(x-1)(x^2-2x+3)$ 之餘式為_____。

Ans: $-4x^2 + 12x - 6$

解析:

$$f(x) = (x-1)(x^2-2x+3)h(x) + a(x^2-2x+3) + 4x+6$$

$$f(1) = 2a + 10 = 2 \Rightarrow a = -4 \therefore \text{餘式爲 } -4x^2 + 12x - 6$$

7. 若多項式 $x^3 - 3x^2 - 6x + 8$ 能被 $x-a$ 及 $x+2a$ 整除, 試求所有可能的實數 a 的值為_____。

Ans: 1 或 -2

解析:

$$x^3 - 3x^2 - 6x + 8 = (x-1)(x+2)(x-4) \therefore a = 1 \text{ 或 } -2$$

8. 若 $f(x) \in R[x]$ 且 $\deg f(x) \geq 3$, 已知 $f(x)$ 除以 $(x+1)^2$ 餘 $3x+2$, $f(x)$ 除以 $(x-1)^2$ 餘 $2x+1$,

則 $f(x)$ 除以 $(x-1)(x+1)^2$ 之餘式為_____。

Ans: $-\frac{1}{2}x^2 + 2x + \frac{3}{2}$

解析:

$$\text{令 } f(x) = (x-1)(x+1)^2q(x) + a(x+1)^2 + (3x+2)$$

$$\therefore f(1) = 3 \Rightarrow 3 = 4a + 5 \therefore a = \frac{-1}{2}$$

$$\therefore \text{所求餘式爲 } \frac{-1}{2}(x+1)^2 + (3x+2) = \frac{-1}{2}x^2 + 2x + \frac{3}{2}$$

9. 設 $a, b \in N, c \in Z$, 若 $x^5 - ax^4 + x^3 - 2bx^2 + x + 2$ 有一次因式 $x-c$, 則 $a+b+c =$ _____。

Ans: 4 或 5

解析:

$$\text{令 } f(x) = x^5 - ax^4 + x^3 - 2bx^2 + x + 2, x-c \mid f(x) \Rightarrow c \mid 2 \Rightarrow c = \pm 1, \pm 2$$

c	1	-1	2	-2
$f(c) = 0$	$a + 2b = 5$ $a = 1, b = 2$ 或 $a = 3, b = 1$	$a + 2b + 1 = 0$ (不合)	$4a + 2b = 11$ (不合)	$2a + b = -5$ (不合)

$\therefore a + b + c = 4$ 或 5

10. 因式分解多項式 $3x^4 - 2x^3 - 5x^2 - 4x - 4 =$ _____。

Ans: $(x + 1)(x - 2)(3x^2 + x + 2)$

解析:

$$\text{令 } f(x) = 3x^4 - 2x^3 - 5x^2 - 4x - 4, f(-1) = 0, f(2) = 0$$

$$\Rightarrow (x + 1) | f(x) \text{ 且 } (x - 2) | f(x)$$

$$\Rightarrow (x + 1)(x - 2) = (x^2 - x - 2) | f(x)$$

\Rightarrow

$$\begin{array}{r} 3 + 1 + 2 \\ 1 - 1 - 2 \overline{) 3 - 2 - 5 - 4 - 4} \\ \underline{3 - 3 - 6} \\ + 1 + 1 - 4 \\ + 1 - 1 - 2 \\ \underline{} \\ + 2 - 2 - 4 \\ \underline{} \\ 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow f(x) = (x^2 - x - 2)(3x^2 + x + 2) = (x + 1)(x - 2)(3x^2 + x + 2)$$

11. 化簡 $7^6 - 6(7^5) - 8(7^4) + 10(7^3) - 25(7^2) + 30(7) + 5 =$ _____。

Ans: 19

解析:

$$\text{設 } f(x) = x^6 - 6x^5 - 8x^4 + 10x^3 - 25x^2 + 30x + 5$$

$$\therefore 7^6 - 6(7^5) - 8(7^4) + 10(7^3) - 25(7^2) + 30(7) + 5 = f(7) = x - 7 \text{ 除 } f(x) \text{ 之餘式}$$

$$\therefore \text{原式} = f(7) = 19$$

$$\begin{array}{r} 1 - 6 - 8 + 10 - 25 + 30 + 5 \quad | 7 \\ \underline{+ 7 + 7 - 7 + 21 - 28 + 14} \\ 1 + 1 - 1 + 3 - 4 + 2 + \underline{19} \end{array}$$

12. 設 k 為負整數，若 $f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 + kx - 3$ 有整係數一次因式，求 k 之值_____。

Ans: -11

解析:

設 $f(x)$ 的整係數一次因式為 $ax - b$ ，則 $a | 1$ ， $b | -3$ ，則 $ax - b$ 可為 $x \pm 1$ ， $x \pm 3$

$$(1) x + 1 | f(x) \Rightarrow f(-1) = 0 \Rightarrow 1 + 2 + 1 - k - 3 = 0 \Rightarrow k = 1 \text{ (不合)}$$

$$(2) x - 1 | f(x) \Rightarrow f(1) = 0 \Rightarrow 1 - 2 + 1 + k - 3 = 0 \Rightarrow k = 3 \text{ (不合)}$$

$$(3) x + 3 | f(x) \Rightarrow f(-3) = 0 \Rightarrow 81 + 54 + 9 - 3k - 3 = 0 \Rightarrow k = 47 \text{ (不合)}$$

$$(4) x - 3 | f(x) \Rightarrow f(3) = 0 \Rightarrow 81 - 54 + 9 + 3k - 3 = 0 \Rightarrow k = -11$$

故 $k = -11$

13. 多項式 $f(x)$ ，以 $(x - 1)(x - 2)$ 除之得餘式為 $20x - 6$ ，以 $(x - 2)(x - 3)$ 除之得餘式為

$32x - 30$ ，求以 $(x - 1)(x - 2)(x - 3)$ 除 $f(x)$ 的餘式_____。

Ans : $6x^2 + 2x + 6$

解析：

$$\text{設 } f(x) = (x - 1)(x - 2) q_1(x) + 20x - 6$$

$$\text{又 } f(x) = (x - 2)(x - 3) q_2(x) + 32x - 30$$

$$\text{設 } f(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3) q(x) + ax^2 + bx + c$$

$$= (x - 1)(x - 2)(x - 3) q(x) + a(x - 1)(x - 2) + 20x - 6$$

$$\text{由 } f(3) = 32 \times 3 - 30 = 66$$

$$\text{得 } f(3) = 2a + 60 - 6 = 66 \quad \therefore a = 6$$

$$\text{故餘式爲 } 6(x - 1)(x - 2) + 20x - 6 = 6x^2 + 2x + 6$$