高雄市明誠中學 高一數學平時測驗 日期：92.12.29					
範圍	多項式四則運算 +ans	班級		姓名	
		座號			

一、 複選題 (每題 8 分)

1. 設多項式 $f(x)$被 $ax-b$（$a\neq 0$）除之商爲 $q(x)$，餘式爲 r，下列何者爲真？

(A)以 $x-\frac{b}{a}$ 除 $f(x)$之餘式爲 ar　(B) $f(bx)$被 $ax-1$ 除之餘式爲 r

(C) $f(bx)$被 $ax-1$ 除之商爲 $bq(x)$　(D) $a\,f(x)$被 $x-\frac{b}{a}$ 除之餘式爲 ar

(E) $x\,f(x)$被 $x-\frac{b}{a}$ 除之餘式爲 $\frac{br}{a}$

Ans：. (B)(D)(E)

解析：

由已知$f(x)=(ax-b)\,q(x)+r$

(A) $f(x)=(x-\frac{b}{a})\cdot aq(x)+r$，商爲$aq(x)$，餘式$r$

(B) $f(bx)=(abx-b)q(bx)+r=(ax-1)\cdot bq(bx)+r$，商爲$bq(bx)$，餘式$r$

(C)商爲$bq(bx)$，非$bq(x)$

(D) $a\,f(x)=(ax-b)\,aq(x)+ar=(x-\frac{b}{a})\,a^2\,q(x)+ar$，商爲$a^2\,q(x)$，餘式$ar$

(E) $x\,f(x)=(ax-b)\cdot xq(x)+rx$

$=(x-\frac{b}{a})\cdot axq(x)+r\,(x-\frac{b}{a})+\frac{br}{a}$

$=(x-\frac{b}{a})(axq(x)+r)+\frac{br}{a}$

商爲$ax\,q(x)+r$，餘式$\frac{br}{a}$

2. 設多項式 $f(x)$，$g(x)$的次數各爲 m，n，即 $\deg f(x)=m$，$\deg g(x)=n$，m，n 爲非負的整數，則

(A) $\deg[f(x)+g(x)]=m$ 或 n　(B) $\deg[f(x)\cdot g(x)]=m+n$　(C) $\deg f(g(x))=mn$

(D) $\deg[f(x)-g(x)]=m$ 或 n　(E) $f(x)$除以 $g(x)$的商爲 $m-n$ 次多項式。

Ans： (B)(C)

解析：

(A)(D) $\deg[f(x)\pm g(x)]=$ 不一定，$m=n$

或$\begin{cases} m，m>n \\ n，m<n \end{cases}=\max\{m，n\}$，$m\neq n$

(B) $\deg[f(x)\cdot g(x)]=\deg f(x)+\deg g(x)=m+n$

(C) $\deg f(g(x))=mn$

(E)當 $m\geq n$ 時，$f(x)$除以 $g(x)$的商爲$(m-n)$次

當 $m<n$ 時，$f(x)$除以 $g(x)$的商爲 0（無次數可言）

二、 填充題(每格 10 分)

1. 若多項式x^3+4x^2+5x-3除以$f(x)$之商式為$x+2$，餘式為 $2x-1$，則$f(x)=$__________。

Ans： x^2+2x-1

解析：

由除法定理知$x^3+4x^2+5x-3=f(x)(x+2)+2x-1$

$\therefore\ f(x)(x+2)=x^3+4x^2+3x-2$

除以$x+2$ 得$f(x)=(x^3+4x^2+3x-2)\div(x+2)=x^2+2x-1$

2. 設$f(x)=x^4-8x^3+25x^2-30x+8=a(x-2)^4+b(x-2)^3+c(x-2)^2+d(x-2)+e$，則

(1) $a+b+c+d+e$之值為__________。

(2) $f(1.99)$的近似值為__________。（至小數點以下第二位，第三位四捨五入）

Ans： (1) 8 (2) -0.06

解析：

(1)

$$\begin{array}{rrrrr|l}
1 & -8 & +25 & -30 & +8 & 2\\
 & +2 & -12 & +26 & -8 & \\
\hline
1 & -6 & +13 & -4 & \boxed{+0} & \\
 & +2 & -8 & +10 & & \\
\hline
1 & -4 & +5 & \boxed{+6} & & \\
 & +2 & -4 & & & \\
\hline
1 & -2 & \boxed{+1} & & & \\
 & +2 & & & & \\
\hline
1 & \boxed{+0} & & & &
\end{array}$$

$\Rightarrow\ a=1$，$b=0$，$c=1$，$d=6$，$e=0$ $\therefore\ a+b+c+d+e=8$

(2) $f(1.99)=1\cdot(1.99-2)^4+0\cdot(1.99-2)^3+1\cdot(1.99-2)^2+6\cdot(1.99-2)+0$

$=(-0.01)^4+(-0.01)^2+6(-0.01)\doteqdot-0.06$

3. $(50+49x+48x^2+\cdots+3x^{47}+2x^{48}+x^{49})(50x^{49}+49x^{48}+48x^{47}+\cdots+3x^2+2x+1)$乘開後，$x^{49}$項的係數為__________。

Ans： 42925

解析：

$(50+49x+48x^2+\cdots+3x^{47}+2x^{48}+x^{49})\cdot(50x^{49}+49x^{48}+48x^{47}+\cdots+3x^2+2x+1)$

展開後，x^{49}項之係數為 $50^2+49^2+48^2+\cdots+3^2+2^2+1^2=\dfrac{1}{6}\times50\times51\times101=42925$

4. 設$\dfrac{2x^2-x+1}{(x-1)(x-2)(x-3)}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x-2}+\dfrac{C}{x-3}$，則實數序對$(A，B，C)=$__________。

Ans：. (1，-7，8)

解析：

利用$\dfrac{b}{a}=\dfrac{c}{a}\ \Rightarrow\ b=c$

$\therefore$ 通分 $\dfrac{2x^2-x+1}{(x-1)(x-2)(x-3)}=\dfrac{A(x-2)(x-3)+B(x-1)(x-3)+C(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)(x-3)}$

$\Rightarrow\ A(x-2)(x-3)+B(x-1)(x-3)+C(x-1)(x-2)=2x^2-x+1$

令$x = 1$，$2A = 2$ $\quad\therefore\quad A = 1$

令$x = 2$，$-B = 7$ $\quad\therefore\quad B = -7$

令$x = 3$，$2C = 16$ $\quad\therefore\quad C = 8$

5. 設多項式$f(x)$除以$x^2 - x + 3$之餘式為$x - 2$，$g(x)$除以$x^2 - x + 3$之餘式為$2x + 3$，求$f(x)\cdot g(x)$除以$x^2 - x + 3$之餘式。

Ans： $x - 12$

解析：

(1)設 $f(x) = (x^2 - x + 3)\, m(x) + (x - 2)$

$g(x) = (x^2 - x + 3)\, n(x) + (2x + 3)$

$\therefore\quad f(x)\cdot g(x)$

$= (x^2 - x + 3)^2\cdot m(x)\cdot n(x) + (x^2 - x + 3)\,[(2x + 3)\, m(x) + (x - 2)\, n(x)] + (x - 2)(2x + 3)$

(2)$\therefore\quad f(x)\cdot g(x)$除以$x^2 - x + 3$之餘式

$= (x - 2)(2x + 3)$除以$x^2 - x + 3$之餘式

$= 2x^2 - x - 6$除以$x^2 - x + 3$之餘式

$= x - 12$

6. 若對任何實數x，$\dfrac{2x^2 + (a-1)x + 3b}{3x^2 + 2x + a}$恆為定值，求$a$及$\dfrac{b}{a}$的值（$a$，$b$為常數）。

Ans： $a = \dfrac{7}{3}$；$\dfrac{b}{a} = \dfrac{2}{9}$

設$\dfrac{2x^2 + (a-1)x + 3b}{3x^2 + 2x + a} = k$（定值）

則$2x^2 + (a - 1)\,x + 3b = 3kx^2 + 2kx + ak$恆成立

對應項係數相等，$2 = 3k$，$a - 1 = 2k$，$3b = ak$

$\Rightarrow\quad k = \dfrac{2}{3}$，$a = \dfrac{7}{3}$，$\dfrac{b}{a} = \dfrac{k}{3} = \dfrac{2}{9}$ **17.** $a = \dfrac{7}{3}$；$\dfrac{b}{a} = \dfrac{2}{9}$

7. $f(x) = (x^5 - 2x^3 + x + 1)^{2001}$展式中之係數和為__________。

Ans： 1

解析：

$f(1) = (1^5 - 2\cdot 1^3 + 1 + 1)^{2001} = 1$ $\quad\therefore\quad f(x)$的各項係數和為 1

8. 若$b < -2$且$x^4 + 2x^3 + 7x^2 + ax + 10$可被$x^2 + 2x - b$整除，則$a + b =$__________。

Ans： -1

解析：

$$\begin{array}{ccccc|c}
1 & 2 & 7 & a & 10 & -2 \\
 & -2 & 0 & -14-2b & & b \\
 & & b & 0 & b(7+b) & \\
\hline
1 & 0 & 7+b & a-2b-14 & 10+b(7+b) &
\end{array}$$

$\begin{cases} a - 2b - 14 = 0 \\ 10 + 7b + b^2 = 0 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad (a, b) = (4, -5), (10, -2)$（不合）

$\therefore\quad a + b = 4 - 5 = -1$

9. $f(x) = 2x^3 - 5x^2 - 8x + a$，$g(x) = x^2 - 4x + b$，已知$f(x)$是$g(x)$的倍式，則$a =$__________，$b$ =__________。

Ans： 6；2

解析：

$f(x) = 2x^3 - 5x^2 - 8x + a$是$g(x) = x^2 - 4x + b$的倍式，即$g(x)$整除$f(x)$，用綜合除法

$$\begin{array}{cccc|c} 2 & -5 & -8 & +a & \\ & 8 & +12 & & 4 \\ & & -2b & -3b & -b \\ \hline 2 & +3 & ,\ 4-2b & a-3b & \end{array}$$

餘式爲 0，故 $4 - 2b = 0$，$a - 3b = 0$ 得$b = 2$，$a = 6$

10. 設$\deg f(x) = 3$，$f(123) = 5$，$f(124) = 6$，$f(125) = 25$，$f(126) = 44$，則$f(122)$之値爲____。

Ans： 40

解析：

設$f(x) = a(x - 125)^3 + b(x - 125)^2 + c(x - 125) + 25$

$$\because \begin{cases} f(123) = 5 \\ f(124) = 6 \\ f(126) = 44 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -8a + 4b - 2c + 25 = 5 \\ -a + b - c + 25 = 6 \\ a + b + c + 25 = 44 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a - 2b + c = 10 \\ a - b + c = 19 \\ a + b + c = 19 \end{cases}$$

$\therefore$ $b = 0$，$a = -3$，$c = 22$

$\therefore$ $f(x) = -3(x - 125)^3 + 22(x - 125) + 25$

$\therefore$ $f(122) = (-3)(-27) + 22(-3) + 25 = 40$