高雄市明誠中學 高一數學平時測驗 日期：92.12.11					
範圍	歸納法+ans	班級		姓名	
		座號			

一、 單選題 (每題 8 分)

1. 設$f(n)=3^{2n+1}+2^{n+2}$，$n\in N$，已知$f(n)$恆爲質數p的倍數，$\forall n\in N$，則$p=$

(A)2 (B)3 (C)5 (D)7 (E)11

Ans： (D)

解析：$f(1)=3^3+2^3=35$ 爲p的倍數

$f(2)=3^5+2^4=259$ 爲p的倍數

$\therefore$ p爲 35，259 的公因數 $\Leftrightarrow$ $p\mid(35，259)=7$，而p爲質數 $\therefore$ $p=7$

2. 設平面上的n條直線最多可把平面分割成a_n個區域，則下列何者正確？

(A) $a_3=6$ (B) $a_5=15$ (C) $a_n=a_{n-1}+n$ (D) $a_n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

Ans： (C)

解析：一條直線把平面分割成 2 個區域 $\therefore$ $a_1=2$

當n條直線把平面分割成a_n個區域時，若再加一條直線，則這直線和原來n條直線各有一個交點，共得n個交點，這n個交點把新加的直線分成$n+1$ 段，每一段表一個區域被這段分成兩個區域，所以新加這條直線，則增加$n+1$ 個區域

故$a_{n+1}=a_n+n+1$

由$a_{n+1}=a_n+n+1$

$\therefore$ $a_{n+1}-a_n=n+1$

即 $a_2=a_1+2$

$a_3=a_2+3$

$a_4=a_3+4$

$\vdots$

+) $a_n=a_{n-1}+n$

$a_n=\ a_1+2+3+4+\cdots+n$

$$a_n=2+2+3+4+\cdots+n=2+\frac{(n-1)(2+n)}{2}=\frac{n^2+n+2}{2}$$

(A) $a_3=\dfrac{3^2+3+2}{2}=7\neq6$，故(A)不正確；(B) $a_5=\dfrac{5^2+5+2}{2}=16\neq15$，故(B)不正確

(C) $a_n=a_{n-1}+n$，故(C)正確；(D) $a_n=\dfrac{n^2+n+2}{2}\neq\dfrac{n(n+1)}{2}$ ，故(D)不正確

3. (複選)對於等式 $1+3+5+\cdots+(2n-1)+(2n+1)=(n+1)^2$，$n\in N$而言，下列敘述何者正確？

(A)當$n=1$ 時，該等式成立 (B)當$n=2$ 時，該等式成立

(C)由$n=k$時該等式成立，可導出$n=k+1$ 時亦成立

(D)當$n=9999$ 時，該等式亦成立 (E)$\forall n\in N$，該等式都成立

Ans： (A)(B)(C)(D)(E)

解析：$1+3+5+\cdots+(2n-1)+(2n+1)$爲等差級數，共$n+1$項

$\therefore 1+3+5+\cdots+(2n-1)+(2n+1)=\frac{1}{2}(n+1)[1+(2n+1)]=(n+1)^2$，$\forall n\in N$

二、 填充題 (每題 10 分)

1. 設$a_1=1$，對任意正整數n，$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+3$恆成立，我們可將它化成$a_{n+1}-\alpha=\frac{1}{2}(a_n-\alpha)$的等比形式，則$\alpha=$__________，從而再求出$a_n=$__________。

Ans： 6；$6-5(\frac{1}{2})^{n-1}$

解析：(1)設$a_{n+1}-\alpha=\frac{1}{2}(a_n-\alpha)$ $a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{2}\alpha$，又已知$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+3$，$\forall n\in N$

$\frac{1}{2}\alpha=3$ $\therefore$ $\alpha=6$

(2) $a_{n+1}-6=\frac{1}{2}(a_n-6)$

$$a_2-6=\frac{1}{2}(a_1-6)$$
$$a_3-6=\frac{1}{2}(a_2-6)$$
$$a_4-6=\frac{1}{2}(a_3-6)$$
$$\vdots$$
$$)\ a_n-6=\frac{1}{2}(a_{n-1}-6)$$

$$a_n-6=(a_1-6)\cdot(\frac{1}{2})^{n-1} \Rightarrow a_n=6-5(\frac{1}{2})^{n-1}$$

2. 已知一數列$\langle a_n\rangle$定義爲$a_1=1$，$a_{n+1}=a_n+2n$，則$a_n=$__________。

Ans： n^2-n+1

解析：已知關係式$a_{k+1}-a_k=2k$，$k\in N$

分別將k以 1，2，3，⋯，$(n-1)$代入上式，

可得$a_2=a_1+2$

$a_3=a_2+4$

$a_4=a_3+6$

$\vdots$

$a_n=a_{n-1}+2(n-1)$，$n\geq 2$

各式相加，得

$a_n=a_1+2[1+2+3+\cdots+(n-1)]=1+n(n-1)=n^2-n+1$，$n\geq 2$

故第n項，$a_n=n^2-n+1$，對於任意自然數n都成立

3. 一數列$< a_n >$，已知$a_1 = 3$，$a_{n+1} = 2a_n + 1$，$n \in N$，則$a_n =$__________。

Ans： $2^{n+1} - 1$

(1)設$a_{n+1}+\ell=2(a_n+\ell)$ $a_{n+1}=2a_n+\ell$，又$a_{n+1}=2a_n+1$，$\forall n\in N$，故 $\ell=1$

$$\begin{aligned}
a_{n+1}+1&=2(a_n+1)\\
a_2+1&=2(a_1+1)\\
a_3+1&=2(a_2+1)\\
a_4+1&=2(a_3+1)\\
&\vdots\\
\times)\ a_n+1&=2(a_{n-1}+1)\\
\hline
a_n+1&=2^{n-1}(a_1+1)\Rightarrow a_n=2^{n+1}-1
\end{aligned}$$

4. 求 $1 + 1^2 + 2 + 2^2 + 3 + 3^2 + \cdots + 30 + 30^2$之和=__________。

Ans： 9920

解析：原式$= (1 + 2 + \cdots + 30) + (1^2 + 2^2 + \cdots + 30^2)$

$$=\frac{1}{2}\cdot 30\cdot 31+\frac{1}{6}\cdot 30\cdot 31\cdot 61=465+9455=9920$$

5. 一數列$\{a_n\}$定義如下：$a_1 = 2$，$a_{n+1} = 2 - \dfrac{1}{a_n}$，$n \in N$，求$a_5 =$__________。

Ans：. $\dfrac{6}{5}$

解析：

$$a_n=2-\frac{1}{a_{n-1}}=2-\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{a_{n-2}}}=2-\left.\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{\begin{matrix}\vdots\\ 2-\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{a_1}}\end{matrix}}}\right\}n-1 \quad =2-\left.\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{\begin{matrix}\vdots\\ 2-\cfrac{a_1}{2a_1-1}\end{matrix}}}\right\}n-2$$

$$=2-\left.\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{\begin{matrix}\vdots\\ 2-\cfrac{1}{\cfrac{3a_1-2}{2a_1-1}}\end{matrix}}}\right\}n-2 \quad =2-\left.\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{\begin{matrix}\vdots\\ 2-\cfrac{1}{2-\cfrac{2a_1-1}{3a_1-2}}\end{matrix}}}\right\}n-3 \quad =2-\left.\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{\begin{matrix}\vdots\\ 2-\cfrac{1}{\cfrac{4a_1-3}{3a_1-2}}\end{matrix}}}\right\}n-3$$

$$\cdots\cdots\cdots=\frac{na_1-(n-1)}{(n-1)a_1-(n-2)}, \qquad a_5=\frac{5a_1-4}{4a_1-3}=\frac{5\cdot 2-4}{4\cdot 2-3}=\frac{6}{5}$$

6. 試利用數學歸納法證明：$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$，$n \in N$。

【證明】

(1) $1^3=1=\dfrac{1^2(1+1)^2}{4}$ $\therefore$ $n=1$ 時，命題成立

(2)假設$n=k$時，命題成立，即 $1^3+2^3+3^3+\ \cdots\ +k^3=\dfrac{k^2(k+1)^2}{4}$

當$n=k+1$ 時，$1^3+2^3+3^3+\ \cdots\ +k^3+(k+1)^3$

$$=\frac{k^2(k+1)^2}{4}+(k+1)^3=\frac{(k+1)^2(k^2+4k+4)}{4}=\frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$$

$\therefore$ $n=k+1$ 時，命題也成立，

根據數學歸納法，對所有自然數n，原式成立

7.試證：對所有自然數n而言，下式恆成立：$1^2+2^2+3^2+\ \cdots\ +n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ 。

【證明】

(1)① $n=1$ 時，左式 $1^2=1$，右式$=\dfrac{1}{6}\cdot 1\cdot 2\cdot 3=1$，故原式成立

②設$n=k$時成立，即 $1^2+2^2+\ \cdots\ +k^2=\dfrac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$

當$n=k+1$ 時，$1^2+2^2+\ \cdots\ +n^2=1^2+2^2+\ \cdots\ +k^2+(k+1)^2$

$$=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)+(k+1)^2$$

$$=\frac{1}{6}(k+1)[k(2k+1)+6(k+1)]$$

$$=\frac{1}{6}(k+1)(2k^2+7k+6)$$

$$=\frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3)$$

$$=\frac{1}{6}(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1]$$

可推得$n=k+1$，原式成立

由數學歸納法知，原式對每一個自然數n都成立

8. $\forall n\in N$，求最大整數m使 $2^{3n+3}-7n+41$ 恆爲m之倍數。

Ans： $m=49$

解析：(1)設$f(n)=2^{3n+3}-7n+41$，則得

$n=1$ 時 ， $2^{3+3}-7+41=98=2\times 49$

$n=2$ 時 ， $2^9-14+41=512-14+41=539=11\times 49$

$\therefore$ 可推測$m=49$

(2)①當$n=1$ 時，$2^{3+3}-7+41=98=2\times 49$ 爲 49 之倍數，故原式成立

②設$n=k$時成立，即設 $2^{3k+3}-7k+41=49p$，$p\in N$。因爲

當$n=k+1$ 時

$2^{3(k+1)+3}-7(k+1)+41=2^{3k+3}\cdot 2^3-7k+34$

$$=8\cdot(2^{3k+3}-7k+41)+49k-294$$

$= 49(8p + k - 6)$ 是 49 的倍數

即$n = k + 1$ 時，原式是 49 的倍數

由數學歸納法知，原式對每一個自然數n都成立

9. 對於任何自然數n，$3^{4n+2} + 5^{2n+1}$是否為 14 的倍數？請證明你的答案。

Ans：. 對任意自然數，$3^{4n+2} + 5^{2n+1}$恆為 14 的倍數

解析：

(1)當$n = 1$ 時，$3^{4\times1+2} + 5^{2\times1+1} = 14 \times 61$ 成立

(2)假設$n = k$時成立，即 $3^{4k+2} + 5^{2k+1}$是 14 的倍數，故令 $3^{4k+2} + 5^{2k+1} = 14p$（$p \in N$）

當$n = k + 1$ 時， $3^{4k+6} + 5^{2k+3}$

$= 3^4 \cdot 3^{4k+2} + 5^2 \cdot 5^{2k+1}$

$= 81 \cdot 3^{4k+2} + 25 \cdot 5^{2k+1}$

$= 81(3^{4k+2} + 5^{2k+1}) - 56 \cdot 5^{2k+1}$

$= 81 \cdot 14p - 14 \cdot 4 \cdot 5^{2k+1}$

$= 14(81p - 4 \cdot 5^{2k+1})$ 故當$n = k + 1$ 時也成立

由數學歸納法知，不論n是任何正整數 $3^{4n+2} + 5^{2n+1}$恆為 14 的倍數

10. 有一級數：$5 \times 7 + 8 \times 9 + 11 \times 11 + 14 \times 13 + \cdots + 92 \times 65$，

(1)試用Σ這個符號來表示此級數。

(2)試利用 $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ 這個結果求此級數的和。

Ans：. (1) $\sum_{k=1}^{30}(3k+2)(2k+5)$ (2) 65865

解析：

(1) $5 \times 7 + 8 \times 9 + 11 \times 11 + 14 \times 13 + \cdots + 92 \times 65 = \sum_{k=1}^{30}(3k+2)(2k+5)$

(2) $\sum_{k=1}^{30}(3k+2)(2k+5) = \sum_{k=1}^{30}(6k^2 + 19k + 10) = 6\sum_{k=1}^{30}k^2 + 19\sum_{k=1}^{30}k + 10\sum_{k=1}^{30}1$

$= 6 \times \frac{30\times31\times61}{6} + 19 \times \frac{30\times31}{2} + 10 \times 30 = 56730 + 8835 + 300 = 65865$

11. 設n為正整數，

(1)試判斷 $4^{2n+1} + 3^{n+2}$恆為那一正質數的倍數？

(2)並以數學歸納法證明你的推測。

Ans：. (1)13

解析：

(1)當$n = 1$ 時，$4^{2n+1} + 3^{n+2} = 4^3 + 3^3 = 13 \times 7$ 為 13 的倍數

當$n = 2$ 時，$4^{2n+1} + 3^{n+2} = 4^5 + 3^4 = 13 \times 85$ 為 13 的倍數

(2)假設$n = k$時，$4^{2n+1} + 3^{n+2}$為 13 的倍數，令 $4^{2k+1} + 3^{k+2} = 13p$，其中$p \in N$

當$n = k + 1$ 時，$4^{2k+3} + 3^{k+3} = 4^2 \cdot 4^{2k+1} + 3 \cdot 3^{k+2}$

$= 16 \cdot (4^{2k+1} + 3^{k+2}) - 13 \cdot 3^{k+2}$

$= 16 \cdot 13p - 13 \cdot 3^{k+2} = 13 \cdot (16p - 3^{k+2})$為 13 的倍數，

故當$n = k + 1$時原式成立

由數學歸納法知，不論n是任何正整數，$4^{2n+1} + 3^{n+2}$恆為 13 的倍數

12. 設 n 為正整數，請以數學歸納法證明：$(1+a)^n \geq 1+na, \forall n \in N$ ，$a > -1$

解析：

(1)當 $n = 1$ 時， $(1+a)^1 = 1+a \geq 1+1\times a$ ，原式成立

(2)假設 $n = k$ 時，$(1+a)^k \geq 1+k\,a$

當 $n = k + 1$ 時，

$$\begin{aligned}(1+a)^{k+1} &= (1+a)(1+a)^k \\ &\geq (1+a)(1+ka) \\ &= 1+(k+1)a+ka^2 \\ &\geq 1+(k+1)a\end{aligned}$$

當 $n = k + 1$ 時，原式成立

由數學歸納法知，不論 n 是任何正整數，$(1+a)^n \geq 1+na$