高雄市明誠中學　高一數學平時測驗　　日期：92.12.01					
範圍	無窮等比級數+ans	班級		姓名	
		座號			

一、　單選題 (每題 8 分)

1. 下列各項何者正確？

(A) $\lim\limits_{n\to\infty}|(-1)^n|=1$　　(B) $|\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n|=1$

(C)已知 $a\neq 0$，$r\neq 0$，若$<a\,r^{n-1}>$收斂，則 $|r|<1$　　(D) $\lim\limits_{n\to\infty}0.\overbrace{99\cdots9}^{n\text{個}}<1$

Ans： (A)

解析：(A) $\lim\limits_{n\to\infty}|(-1)^n|=\lim\limits_{n\to\infty}1=1$

(B)$\because$ $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n$ 爲發散數列，故 $|\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n|$ 無意義，　故(B)不正確

(C)已知 $a\neq 0$，$r\neq 0$，若$<a\,r^{n-1}>$收斂，則 $-1<r\leq 1$，　故(C)不正確

(D) $\lim\limits_{n\to\infty}0.\overbrace{99\cdots9}^{n\text{個}}=1$，故(D)不正確

2. 設 $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n=n^2+1$，$n\in N$，則下列敘述何者正確？(複選)

(A) $a_1=2$　(B) $a_5=9$　(C) $a_n=2n-1$，$\forall n\in N$

(D) $\langle a_n\rangle$爲一個等差數列　(E) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 是收斂的

Ans： (A)(B)

解析：

$$\begin{array}{rl} & S_n=a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}+a_n\text{，}n\geq 1 \\ -) & S_{n-1}=a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}\text{，}n\geq 2 \\ \hline \therefore & a_n=S_n-S_{n-1}\text{，}n\geq 2 \end{array}$$

又 $a_1=S_1$，　$a_1=2$

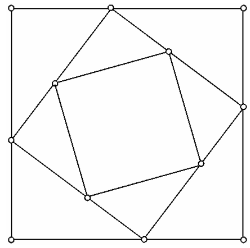
$a_n=S_n-S_{n-1}=(n^2+1)-[(n-1)^2+1]=2n-1$，　$n\geq 2$

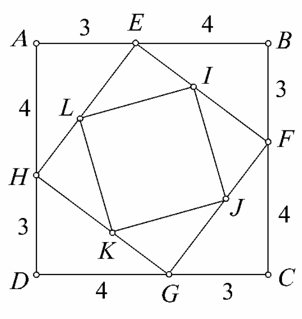
$\langle a_n\rangle=2$，3，5，7，9，⋯不是A.P.，　$S_n=n^2+1$

$\because$ $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\infty$，不存在　$\therefore$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 是發散的

二、　填充題 (每題 10 分)

1. 如下圖，一正方形的邊長爲 a，以 3：4 的順序內分各邊，再連各分點得第二個正方形，再以同順序內分第二個正方形各邊，連接各分點得第三個正方形，如此繼續下去，則所有正方形的面積總和爲＿＿。





Ans： $\dfrac{49}{24}a^2$

解析：如上圖，正方形$ABCD$面積 $=a^2$，在$\triangle AEH$中，$\overline{AE}=\dfrac{3}{7}a$，

$\overline{AH}=\dfrac{4}{7}a$，$\therefore$ $\overline{EH}=\sqrt{(\dfrac{3}{7}a)^2+(\dfrac{4}{7}a)^2}=\dfrac{5}{7}a$

故正方形$EFGH$面積$=(\frac{5}{7}a)^2$，在$\triangle EIL$中，$\overline{EI}=\frac{15}{49}a$，$\overline{EL}=\frac{20}{49}a$

$\therefore\ \overline{IL}=\sqrt{(\frac{15}{49}a)^2+(\frac{20}{49}a)^2}=\frac{25}{49}a$，正方形$IJKL$面積$=(\frac{25}{49}a)^2$

所有正方形的面積成一等比級數，公比爲$(\frac{5}{7})^2=\frac{25}{49}$

$\therefore$ 所有正方形的面積總和$=a^2+\frac{25}{49}a^2+(\frac{25}{49})^2a^2+\cdots=a^2\times\frac{1}{1-\frac{25}{49}}=\frac{49}{24}a^2$

2. 一皮球自離地面 10 公尺處落下。首次反彈高度爲$\frac{10}{3}$公尺，此後每次反彈高度爲其前次反彈高度的$\frac{1}{3}$，則此球到完全靜止前，所經過路徑的總長爲__________公尺。

Ans： 20 公尺

解析：

首次反彈高度$\frac{10}{3}$公尺，每次反彈的高度爲其前次反彈高度的$\frac{1}{3}$，故

第一次反彈再落下所經過距離爲 $2\cdot10\cdot\frac{1}{3}$公尺

第二次反彈再落下所經過距離爲 $2\cdot10\cdot(\frac{1}{3})^2$公尺

$\vdots$

第n次反彈再落下所經過距離爲 $2\cdot10\cdot(\frac{1}{3})^n$ 公尺

$\vdots$

此皮球到靜止時所經過的距離爲

$10+2\cdot10\cdot\frac{1}{3}+2\cdot10\cdot(\frac{1}{3})^2+2\cdot10\cdot(\frac{1}{3})^3+\cdots+2\cdot10\cdot(\frac{1}{3})^n+\cdots$

$=10+20\cdot[\frac{1}{3}+(\frac{1}{3})^2+(\frac{1}{3})^3+\cdots+(\frac{1}{3})^n+\cdots]=10+20\cdot\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=20$ 公尺

3. 計算無窮級數$\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{-2}{7})^n$的和爲__________。

Ans： $\frac{7}{9}$

解析：$\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{-2}{7})^n=1+(\frac{-2}{7})+(\frac{-2}{7})^2+\cdots+(\frac{-2}{7})^{n-1}+\cdots=\frac{1}{1-(\frac{-2}{7})}=\frac{7}{9}$

4. 若 $<\frac{3^{n+1}}{(x+3)^n}>$ 是發散數列，則x範圍爲__________。

Ans：$-6\le x<0$

解析：

數列 $<\frac{3^{n+1}}{(x+3)^n}>=<\frac{3^2}{(x+3)^1}, \frac{3^3}{(x+3)^2}, \frac{3^4}{(x+3)^3}, \cdots, \frac{3^{n+1}}{(x+3)^n}, \cdots>$ 的公比爲$\frac{3}{x+3}$，

$<\dfrac{3^{n+1}}{(x+3)^n}>$ 是發散數列，故$|\dfrac{3}{x+3}|>1$ 或 $\dfrac{3}{x+3}=-1$ $\Leftrightarrow$ $|\dfrac{x+3}{3}|<1$ 或 $\dfrac{x+3}{3}=-1$

$\Leftrightarrow$ $|x+3|<3$ 或 $x+3=-3$ $\Leftrightarrow$ $-3<x+3<3$ 或 $x=-6$ $\Leftrightarrow$ $-6\le x<0$

5. 數列$\dfrac{1}{1}$，$\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{2}{2}$，$\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{2}{3}$，$\dfrac{3}{3}$，$\dfrac{1}{4}$，$\dfrac{2}{4}$，$\dfrac{3}{4}$，$\dfrac{4}{4}$，$\dfrac{1}{5}$，⋯，依此規則繼續下去，則$\dfrac{7}{11}$爲第__________項，又此數列的第一項到$\dfrac{7}{11}$這一項的總和爲__________。

Ans：62；$\dfrac{771}{22}$

解析：將數列分群如下 $(\dfrac{1}{1})$，$(\dfrac{1}{2}，\dfrac{2}{2})$，$(\dfrac{1}{3}，\dfrac{2}{3}，\dfrac{3}{3})$，$(\dfrac{1}{4}，\dfrac{2}{4}，\dfrac{3}{4}，\dfrac{4}{4})$，⋯

第 k 群共有 k 個數，每個數的分母均爲 k，故知$\dfrac{7}{11}$在第 11 群的第 7 個數，所以$\dfrac{7}{11}$的項數爲 $(1+2+\cdots+10)+7=62$ 項。

第一項到$\dfrac{7}{11}$這一項的總和爲$(\dfrac{1}{1})+(\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{2})+(\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3}+\dfrac{3}{3})+\cdots+(\dfrac{1}{10}+\cdots+\dfrac{10}{10})+(\dfrac{1}{11}+\cdots+\dfrac{7}{11})$

$=(\sum\limits_{k=1}^{10}\dfrac{k+1}{2})+\dfrac{1}{11}(1+2+\cdots+7)=\dfrac{65}{2}+\dfrac{28}{11}=\dfrac{771}{22}$

6. 設a與b均爲實數。若無窮級數$\dfrac{a}{2^1}+\dfrac{b}{2^2}+\dfrac{a}{2^3}+\dfrac{b}{2^4}+\cdots+\dfrac{a}{2^{2n-1}}+\dfrac{b}{2^{2n}}+\cdots=3$，則 $2a+b=$___。

Ans：9

解析：$\dfrac{a}{2^1}+\dfrac{b}{2^2}+\dfrac{a}{2^3}+\dfrac{b}{2^4}+\cdots+\dfrac{a}{2^{2n-1}}+\dfrac{b}{2^{2n}}+\cdots$

$=a\,(\dfrac{1}{2^1}+\dfrac{1}{2^3}+\dfrac{1}{2^5}+\cdots+\dfrac{1}{2^{2n-1}}+\cdots)\quad+\dfrac{b}{2}(\dfrac{1}{2^1}+\dfrac{1}{2^3}+\dfrac{1}{2^5}+\cdots+\dfrac{1}{2^{2n-1}}+\cdots)$

$=(a+\dfrac{b}{2})(\dfrac{1}{2^1}+\dfrac{1}{2^3}+\dfrac{1}{2^5}+\cdots+\dfrac{1}{2^{2n-1}}+\cdots)$

$=(a+\dfrac{b}{2})\cdot\dfrac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}}=(a+\dfrac{b}{2})\cdot\dfrac{2}{3}=3$，故 $2a+b=9$

7. 已知一無窮等比級數，和爲$\dfrac{18}{5}$，其第二項爲 -4，則首項爲__________。

Ans：6

解析：設首項 a，公比 $|r|<1\Rightarrow$ $\begin{cases}\dfrac{a}{1-r}=\dfrac{18}{5}\cdots\cdots①\\ ar=-4\quad\cdots\cdots②\end{cases}$

由②得$a=\dfrac{-4}{r}$，代入①得$9r^2-9r-10=0$

$\Rightarrow$ $(3r+2)(3r-5)=0$ $\Rightarrow$ $r=-\dfrac{2}{3}$或$\dfrac{5}{3}$（不合），$\therefore$ $a=6$

8. 求無窮等比級數 $0.44+0.0404+0.004004+0.00040004+\cdots$之和 $=$__________。

Ans：$\dfrac{16}{33}$

解析：

$$a_k = 4(\frac{1}{10})^k + 4(\frac{1}{10})^{2k}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = 4\sum_{k=1}^{\infty} (\frac{1}{10})^k + 4\sum_{k=1}^{\infty} (\frac{1}{10})^{2k} \quad = 4\times\frac{\frac{1}{10}}{1-\frac{1}{10}} + 4\times\frac{\frac{1}{100}}{1-(\frac{1}{10})^2} = \frac{16}{33}$$

9. 已知數列$\langle a_n\rangle$，若$\sum_{k=1}^{n} a_k = n^2+3n+1$，則$a_n =$＿＿＿＿＿。

Ans：$a_n = \begin{cases} 5 \text{，} n=1 \\ 2n+2\text{，} n\geq 2 \end{cases}$

解析：

若$\sum_{k=1}^{n} a_k = n^2+3n+1$，則$n=1$時，$\sum_{k=1}^{1} a_k = a_1 = 1^2+3\cdot 1+1=5$

當$n\geq 2$時，$a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k = (n^2+3n+1)-[(n-1)^2+3(n-1)+1]$

$$= n^2+3n+1-n^2+2n-1-3n+3-1 = 2n+2$$

故$a_n = \begin{cases} 5 \text{，} n=1 \\ 2n+2\text{，} n\geq 2 \end{cases}$

10. 求$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+3^n}{5^n}$之和 ＝＿＿＿＿＿。

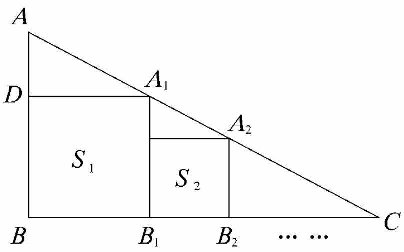
Ans：$\dfrac{13}{6}$

解析：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+3^n}{5^n} = \sum_{n=1}^{\infty}[(\frac{2}{5})^n+(\frac{3}{5})^n] = \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{2}{5})^n + \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{3}{5})^n$$

$$=[(\frac{2}{5})+(\frac{2}{5})^2+(\frac{2}{5})^3+\cdots]+[(\frac{3}{5})+(\frac{3}{5})^2+(\frac{3}{5})^3+\cdots]$$

$$=\frac{\frac{2}{5}}{1-\frac{2}{5}}+\frac{\frac{3}{5}}{1-\frac{3}{5}} = \frac{2}{5}\times\frac{5}{3}+\frac{3}{5}\times\frac{5}{2} = \frac{2}{3}+\frac{3}{2} = \frac{13}{6}$$



11. 如下圖：$\overline{AC}=2\overline{AB}$，$\overline{BC}=\sqrt{12}$，$\angle ABC=90°$，且$S_1$，$S_2$，… 分別表示△$ABC$中諸內接正方形的面積，則$S_1+S_2+\cdots=$＿ 。

Ans：$\dfrac{24\sqrt{3}-12}{11}$

解析：

設S_1，S_2，S_3，…，S_n，…各正方形邊長依次爲x_1，x_2，x_3，…，x_n，…，令$\overline{BB_1}=x_1$，

在△ABC中，∵ $\overline{AC}=2\overline{AB}$，$\angle ABC=90°$，

設 $\overline{AB}=t$，$\overline{AC}=2t$ $\Rightarrow$ $t^2+(\sqrt{12})^2=(2t)^2$ $\Rightarrow$ $t=\dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}=2$，故 $\overline{AB}=2$，$\overline{AC}=4$

$\because$ $\overline{A_1B_1}\,//\,\overline{AB}$ $\therefore$ 由相似三角形性質知

$$\Delta A_1B_1C\sim\Delta ABC\Rightarrow\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{CB_1}}{\overline{CB}}\quad\Rightarrow\quad\frac{x_1}{2}=\frac{\sqrt{12}-x_1}{\sqrt{12}}\quad\Rightarrow\quad x_1=3-\sqrt{3}$$

可得公比 $r=\dfrac{x_1}{\overline{AB}}=\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}<1$，

無窮等比級數和 $S_1+S_2+S_3+\cdots=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}x_n{}^2=\frac{(3-\sqrt{3})^2}{1-(\frac{3-\sqrt{3}}{2})^2}=\frac{24\sqrt{3}-12}{11}$

12. $\displaystyle\sum_{k=-2}^{13}6=$__________。

Ans：96

解析：$\displaystyle\sum_{k=-2}^{13}6=\underbrace{6+6+\cdots+6}_{16\text{個}}=16\times6=96$

13. 觀察下圖中數字排列的規律，試求出第一列到第 40 列所有數字總和 =__________。

第 1 列				1			
第 2 列			1	2	1		
第 3 列		1	2	3	2	1	
第 4 列	1	2	3	4	3	2	1
				...			

Ans：22140

解析：

設 a_n 為第 n 列所有數字和

$$a_n=1+2+\cdots+(n-1)+n+(n-1)+\cdots+2+1$$

$$=2\,[1+2+\cdots+(n-1)]+n=n\,(n-1)+n=n^2$$

$$\sum_{n=1}^{40}a_n=\sum_{n=1}^{40}n^2=\frac{40\cdot41\cdot81}{6}=22140$$

14. 設無窮等比級數 $5+\dfrac{5}{4}+\dfrac{5}{4^2}+\cdots+\dfrac{5}{4^{n-1}}+\cdots$ 之和為 S，前 n 項之和為 S_n，則 $S=$________，又若 $|S-S_n|<\dfrac{1}{1000}$，則最小自然數 $n=$__________。

Ans：$\dfrac{20}{3}$；7

解析：

$$S_n=\frac{5(1-\frac{1}{4^n})}{1-\frac{1}{4}}=\frac{20}{3}(1-\frac{1}{4^n})\text{，}S=\frac{5}{1-\frac{1}{4}}=\frac{20}{3}$$

$$|S-S_n|=\frac{20}{3}(\frac{1}{4})^n<\frac{1}{1000} \quad\Rightarrow\quad 3\cdot 4^n>20000\Rightarrow\quad 4^n>\frac{20000}{3}=6666.6\cdots$$

$\therefore\quad n\geq 7\quad\therefore\quad n=7$ 爲最小

15. 設數列 $<a_n>$，其中$a_n=\sqrt{n+1}+\sqrt{n}$ ，試求級數$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}$之值__________。。

Ans： $\sqrt{n+1}-1$

解析：

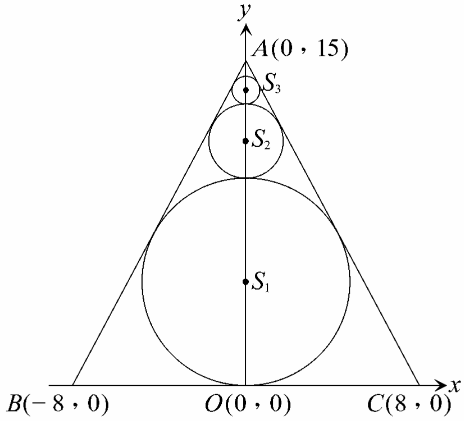
$$\frac{1}{a_n}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\frac{1\cdot(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})\cdot(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$$

可得$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}=\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})=\sqrt{n+1}-1$

16. 如下圖，在△ABC中作內切圓S_1，再作圓S_2與兩邊 $\overline{AB}$，$\overline{AC}$及圓S_1相切，又再作圓S_3與兩邊$\overline{AB}$，$\overline{AC}$及圓S_2相切。如此繼續下去，依次得圓S_1，S_2，S_3，⋯，S_n，⋯；設其面積依次爲A_1，A_2，A_3，⋯，A_n，⋯。

(1)求A_1之值__________。。

(2)求無窮級數$\sum_{n=1}^{\infty}A_n$之和__________。。



Ans：(1)$\frac{576\pi}{25}$　(2)$\frac{450\pi}{17}$

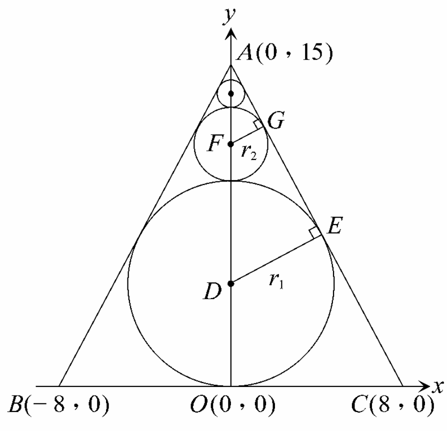
解析：

(1)在△AOC中　∵　$\overline{AO}=15$，$\overline{OC}=8$

$\therefore\quad \overline{AC}=17$，又△$AOC\sim$△$AED$

$\therefore\quad \frac{\overline{ED}}{\overline{OC}}=\frac{\overline{AD}}{\overline{AC}}$，即$\frac{r_1}{8}=\frac{15-r_1}{17}\quad\Rightarrow\quad r_1=\frac{24}{5}$

故圓S_1的面積$A_1=\pi r_1^{\ 2}=\frac{576\pi}{25}$



(2)同理△$AOC\sim$△AGF　$\therefore\quad\frac{\overline{GF}}{\overline{OC}}=\frac{\overline{AF}}{\overline{AC}}$

即$\frac{r_2}{8}=\frac{15-2r_1-r_2}{17}\quad\Rightarrow\quad r_2=\frac{216}{125}$

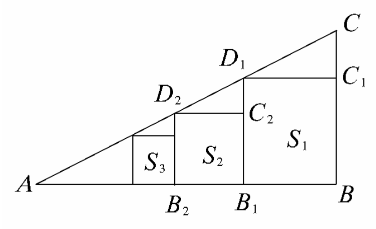
得公比$\frac{A_2}{A_1}=\frac{r_2^{\ 2}}{r_1^{\ 2}}=(\frac{r_2}{r_1})^2=(\frac{9}{25})^2=\frac{81}{625}$

$$\therefore\quad \sum_{n=1}^{\infty}A_n=A_1+A_2+A_3+\cdots=\frac{576\pi}{25}+\frac{576\pi}{25}(\frac{81}{625})+\frac{576\pi}{25}(\frac{81}{625})^2+\cdots$$

$$=\frac{576\pi}{25}\cdot\frac{1}{1-\frac{81}{625}}=\frac{450\pi}{17}$$

17. 如下圖，直角△ABC中，$\overline{BC}=1$，$\overline{AB}=2$，正方形$BC_1D_1B_1$面積爲S_1，正方形$B_1C_2D_2B_2$面積爲S_2，⋯，求$S_1+S_2+S_3+\ \cdots\ +S_n+\ \cdots$之和__________。。

Ans：$\frac{4}{5}$



解析：

$\because\ \overline{BC}=1$，$\overline{BC}=2$，令$\overline{BC_1}=x$

$\therefore\ \overline{D_1C_1}=x$，$\overline{CC_1}=1-x$

由$\triangle CD_1C_1\sim\triangle CAB$ $\therefore\ \frac{1-x}{x}=\frac{1}{2}$ $\therefore\ x=\frac{2}{3}$ $S_1=(\frac{2}{3})^2$

同理，設$\overline{B_1C_2}=y$ $\therefore\ \frac{\frac{2}{3}-y}{y}=\frac{1}{2}$ $\therefore\ y=\frac{4}{9}$ $S_2=(\frac{4}{9})^2=(\frac{2}{3})^4$

$S_3=(\frac{2}{3})^6$，$S_4=(\frac{2}{3})^8$，$\cdots\therefore$ $S_1+S_2+S_3+\cdots+S_n+\cdots=\frac{\frac{4}{9}}{1-\frac{4}{9}}=\frac{4}{5}$

18. 數列$<a_n>$中，$a_1=2$，$7a_{n+1}=3a_n+2$，求$a_n=$__________及$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=$__________。

Ans：$a_n=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}(\frac{3}{7})^{n-1}$，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{2}$

解析：

$\because\ a_{n+1}=\frac{3}{7}a_n+\frac{2}{7}$

令$a_{n+1}-\alpha=\frac{3}{7}(a_n-\alpha)$ $\therefore\ \alpha-\frac{3}{7}\alpha=\frac{2}{7}$ $\therefore\ \alpha=\frac{1}{2}$

即$a_{n+1}-\frac{1}{2}=\frac{3}{7}(a_n-\frac{1}{2})$，

$\therefore\ <a_n-\frac{1}{2}>$表首項爲$a_1-\frac{1}{2}=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$， 公比爲$\frac{3}{7}$之等比數列。

$\because\frac{3}{7}<1\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\cdot 0=\frac{1}{2}$

19. 試求$\frac{1}{5}+\frac{1+3}{5^2}+\frac{1+3+9}{5^3}+\cdots+\frac{1+3+\cdots+3^{n-1}}{5^n}+\cdots=$__________。

Ans：$\frac{5}{8}$

解析：

$\frac{1}{5}+\frac{1+3}{5^2}+\frac{1+3+9}{5^3}+\cdots+\frac{1+3+\cdots+3^{n-1}}{5^n}+\cdots$

$=\frac{1}{5}+\frac{1+3}{5^2}+\frac{1+3+3^2}{5^3}+\cdots+\frac{1+3+\cdots+3^{n-1}}{5^n}+\cdots$

其一般項$=\frac{1+3+\cdots+3^{k-1}}{5^k}=\frac{\frac{1\cdot(3^k-1)}{3-1}}{5^k}$ $=\frac{1}{2}[(\frac{3}{5})^k-(\frac{1}{5})^k]$

$\therefore$ 原式 $=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2}[(\frac{3}{5})^k-(\frac{1}{5})^k]=\frac{1}{2}(\frac{\frac{3}{5}}{1-\frac{3}{5}}-\frac{\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}})=\frac{1}{2}(\frac{3}{2}-\frac{5}{4})=\frac{5}{8}$

20. 將分數$\frac{3}{7}$表成小數時，令小數點後第n位的數字爲a_n，則$a_{2003}=$__________。

Ans：5

解析：$\frac{3}{7}=0.\overline{428571}$

$2003=6\cdot 333+4$，亦即 1999 被 6 除的餘數爲 4，故小數點後第 2003 位數字爲 5。

21. 無窮級數$\frac{3}{10}+\frac{1}{10^2}+\frac{2}{10^3}+\frac{1}{10^4}+\frac{2}{10^5}+\cdots+\frac{1}{10^{2n}}+\frac{2}{10^{2n+1}}+\cdots$之和爲__________。

Ans：$\frac{103}{330}$

解析：$\frac{3}{10}+\frac{1}{10^2}+\frac{2}{10^3}+\frac{1}{10^4}+\frac{2}{10^5}+\cdots+\frac{1}{10^{2n}}+\frac{2}{10^{2n+1}}+\cdots$

$=\frac{1}{10}+(\frac{2}{10}+\frac{2}{10^3}+\frac{2}{10^5}+\cdots+\frac{2}{10^{2n+1}}+\cdots)\quad+(\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^4}+\frac{1}{10^6}+\cdots+\frac{1}{10^{2n}}+\cdots)$

$=\frac{1}{10}+\frac{\frac{2}{10}}{1-\frac{1}{100}}+\frac{\frac{1}{100}}{1-\frac{1}{100}}=\frac{1}{10}+\frac{20}{99}+\frac{1}{99}=\frac{99+200+10}{990}=\frac{103}{330}$

22. 求下列級數和：

(1)$1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\cdots+k\cdot(k+1)+\cdots+50\cdot 51=$__________。

(2)$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{k\cdot(k+1)}+\cdots+\frac{1}{50\cdot 51}=$__________。

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}(0.1\overline{7}+0.\overline{2})^n=$__________。

Ans：(1) 44200 (2)$\frac{50}{51}$ (3)$\frac{2}{3}$

解析：(1)$\sum_{k=1}^{50}k(k+1)=\sum_{k=1}^{50}(k^2+k)=\frac{50\cdot 51\cdot 101}{6}+\frac{50\cdot 51}{2}\quad=42925+1275=44200$

(2)$\sum_{k=1}^{50}\frac{1}{k\cdot(k+1)}=\sum_{k=1}^{50}\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{50}-\frac{1}{51}=1-\frac{1}{51}=\frac{50}{51}$

(3)$\sum_{n=1}^{\infty}(0.1\overline{7}+0.\overline{2})^n=\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{17-1}{90}+\frac{2}{9})^n=\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{2}{5})^n=\frac{\frac{2}{5}}{1-\frac{2}{5}}=\frac{2}{3}$

23 將循環小數 $0.06\overline{45}$ 化爲分數，其最簡分數爲__________。

Ans：$\frac{71}{1100}$

解析：$0.06\overline{45}=\frac{645-6}{9900}=\frac{639}{9900}=\frac{71}{1100}$

24. 設一無窮等比級數和爲$\frac{64}{3}$，首項與第 2 項之和爲 20，則此數列公比 =__________。

Ans：$\pm\frac{1}{4}$

解析：$\begin{cases} a+ar=20 & \cdots\cdots ① \\ \dfrac{a}{1-r}=\dfrac{64}{3} & \cdots\cdots ② \end{cases}$

$\frac{①}{②}$ 得$1-r^2=\dfrac{20}{\frac{64}{3}}=\dfrac{15}{16} \quad \Rightarrow \quad r=\pm\dfrac{1}{4}$

25. 數列$\langle a_n \rangle$之前n項的和$S_n=2^n(2n+1)$，則$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n+3}{a_n}$ = __________。

Ans：$\frac{11}{6}$

解析：

$a_1=S_1=2 \cdot 3=6$

$a_n=S_n-S_{n-1}=2^n(2n+1)-2^{n-1}(2n-1)=2^{n-1}\cdot(2n+3)$ ，$n\ge 2$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+3}{a_n}=\frac{5}{a_1}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2n+3}{2^{n-1}\cdot(2n+3)}=\frac{5}{6}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}=\frac{5}{6}+\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{5}{6}+1=\frac{11}{6}$$

26. 已知無窮等比級數和爲 9，前兩項和爲 8，則此等比級數公比爲__________。

Ans：$\pm\frac{1}{3}$

解析：

設首項爲a_1，公比爲r，則$\begin{cases} \dfrac{a_1}{1-r}=9 \\ a_1+a_1r=8 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a_1(\dfrac{1}{1-r})=9 \cdots\cdots ① \\ a_1(1+r)=8 \cdots\cdots ② \end{cases}$

$\frac{②}{①}$ 得$(1+r)(1-r)=\dfrac{8}{9} \Rightarrow \quad 1-r^2=\dfrac{8}{9} \quad \Rightarrow \quad r^2=\dfrac{1}{9} \quad \Rightarrow \quad r=\pm\dfrac{1}{3}$

27. 求下列各級數之和：

(1) $\sum_{n=1}^{10}(2^n+3n+4)=$__________。 (2) $\sum_{n=0}^{\infty}3\left(\frac{4}{5}\right)^n=$__________。

(3) 0.3 + 0.033 + 0.00333 + 0.0003333 +⋯= __________。

Ans：(1) 2251 (2) 15 (3) $\frac{100}{297}$

解析：(1) $\sum_{n=1}^{10}(2^n+3n+4)=\sum_{n=1}^{10}2^n+3\times\sum_{n=1}^{10}n+\sum_{n=1}^{10}4 = \dfrac{2(2^{10}-1)}{2-1}+3\times\dfrac{10(1+10)}{2}+4\times 10$

$= 2046 + 165 + 40 = 2251$

(2) $\sum_{n=0}^{\infty} 3(\frac{4}{5})^n = 3\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{4}{5})^n = 3\times\frac{1}{1-\frac{4}{5}} = 15$

(3) $0.3+0.033+0.00333+0.0003333+\cdots$

$=\frac{3}{9}(0.9+0.099+0.00999+0.0009999+\cdots)$

$=\frac{3}{9}[(1-\frac{1}{10})+(\frac{1}{10}-\frac{1}{10^3})+(\frac{1}{10^2}-\frac{1}{10^5})+\cdots]$

$=\frac{3}{9}[(1+\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\cdots)-(\frac{1}{10}+\frac{1}{10^3}+\frac{1}{10^5}+\cdots)]$

$=\frac{3}{9}(\frac{1}{1-\frac{1}{10}}-\frac{\frac{1}{10}}{1-\frac{1}{10^2}})=\frac{3}{9}\times\frac{100}{99}=\frac{100}{297}$

28. 無窮等比級數$1-\frac{2}{3}+\frac{4}{9}-\cdots+(-\frac{2}{3})^{n-1}+\cdots$之和爲$S$，其前$n$項的和爲$S_n$，則使

$|S-S_n|<\frac{1}{10}$之最小正整數$n=$__________。

Ans：5

解析：

$S=\frac{1}{1-(-\frac{2}{3})}=\frac{1}{\frac{5}{3}}=\frac{3}{5}$

$S_n=\frac{1\cdot[1-(-\frac{2}{3})^n]}{1-(-\frac{2}{3})}=\frac{3}{5}[1-(-\frac{2}{3})^n]$

$|S-S_n|=|\frac{3}{5}-\frac{3}{5}[1-(\frac{2}{3})^n]\ |=|\frac{3}{5}(-\frac{2}{3})^n|=\frac{3}{5}\times(\frac{2}{3})^n<\frac{1}{10}$，$(\frac{2}{3})^n<\frac{1}{10}\times\frac{5}{3}=\frac{1}{6}$

$(\frac{2}{3})^2=\frac{4}{9}=\frac{8}{18}>\frac{3}{18}=\frac{1}{6}$，$(\frac{2}{3})^3=\frac{8}{27}=\frac{16}{54}>\frac{9}{54}=\frac{1}{6}$，$(\frac{2}{3})^4=\frac{16}{81}=\frac{32}{162}>\frac{27}{162}=\frac{1}{6}$，

$(\frac{2}{3})^5=\frac{32}{243}=\frac{64}{486}<\frac{81}{486}=\frac{1}{6}$，∴ n最小爲 5

29. 求級數$\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{5}{7}+\frac{1}{4}+\frac{4}{9}+\frac{10}{49}+\frac{1}{8}-\frac{8}{27}+\frac{20}{343}+\cdots$至無限多項之和__________。

Ans：$\frac{8}{5}$

解析：$\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{5}{7}+\frac{1}{4}+\frac{4}{9}+\frac{10}{49}+\frac{1}{8}-\frac{8}{27}+\frac{20}{343}+\cdots$

$=(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots)+(-\frac{2}{3}+\frac{4}{9}-\frac{8}{27}\cdots)+(\frac{5}{7}+\frac{10}{49}+\frac{20}{343}+\cdots)$

$$=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}+\frac{-\frac{2}{3}}{1-(-\frac{2}{3})}+\frac{\frac{5}{7}}{1-\frac{2}{7}}=1-\frac{2}{5}+1=\frac{8}{5}$$

30. 求無窮等比級數$(\sqrt{5}+2)+\frac{\sqrt{5}+3}{3}+(\frac{2\sqrt{5}+2}{9})+\cdots$的和 S。

Ans： $\frac{39+18\sqrt{5}}{11}$

解析：

∵ $r=\frac{\frac{\sqrt{5}+3}{3}}{\sqrt{5}+2}=\frac{\sqrt{5}+3}{3(\sqrt{5}+2)}=\frac{(\sqrt{5}+3)(\sqrt{5}-2)}{3(5-4)}=\frac{\sqrt{5}-1}{3}$

∴ 無窮等比級數之和

$$S=\frac{\sqrt{5}+2}{1-\frac{\sqrt{5}-1}{3}}=\frac{3(\sqrt{5}+2)}{4-\sqrt{5}}=\frac{3(\sqrt{5}+2)(4+\sqrt{5})}{16-5}=\frac{39+18\sqrt{5}}{11}$$

31. 設α，β爲 $2x^2-4x+1=0$ 之二根，且$\alpha<\beta$，求級數$\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{\alpha}{\beta})^n$ 之和__________。。

Ans： $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$

解析：∵ $2x^2-4x+1=0$ 之二根爲$x=\frac{2\pm\sqrt{4-2}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{2}}{2}$

∵ $\alpha<\beta$ ∴ $\alpha=\frac{2-\sqrt{2}}{2}$，$\beta=\frac{2+\sqrt{2}}{2}\Rightarrow$ $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}=3-2\sqrt{2}<1$

∴ 級數$\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{\alpha}{\beta})^n=\frac{1}{1-\frac{\alpha}{\beta}}=\frac{1}{1-(3-2\sqrt{2})}=\frac{1}{-2+2\sqrt{2}}=\frac{1+\sqrt{2}}{2}$