高雄市明誠中學 高一數學平時測驗 日期：92.11.27					
範圍	3-1 等差等比數列+ans	班級		姓名	
		座號			

一、 填充題 (每題 10 分)

1. 在 4 與 12 之間依序插入 10 個數 a_1，a_2，a_3，⋯，a_{10}，使此 12 個數成等差數列，則 $a_7 =$ _____。

Ans： $\dfrac{100}{11}$

解析：

等差數列< 4，a_1，a_2，a_3，⋯，a_{10}，12 >的首項爲 4，第 12 項爲 12，

故由 $a_{12} = a_1 + (11-1)d$ ，

所以公差 $d = \dfrac{12-4}{12-1} = \dfrac{8}{11}$ ，第八項 $a_7 = 4 + (8-1) \cdot d = 4 + 7 \cdot \dfrac{8}{11} = \dfrac{100}{11}$

2. 有二等差數列之首 n 項和之比爲 $(3n+1):(7n-11)$，則此二數列第 6 項的比爲__________。

Ans： $\dfrac{17}{33}$

解析：

Sol(一)

設等差數列 $<a_n>$ 之公差爲 d，前 n 項和爲 S_n

等差數列 $<b_n>$ 之公差爲 d'，前 n 項和爲 S_n'

$$\therefore \quad \frac{S_n}{S_n'} = \frac{\frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]}{\frac{n}{2}[2b_1 + (n-1)d']} = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2b_1 + (n-1)d'} = \frac{3n+1}{7n-11}$$

$$\therefore \quad \frac{a_6}{b_6} = \frac{a_1 + 5d}{b_1 + 5d'} = \frac{2a_1 + 10d}{2b_1 + 10d'} = \frac{3(11)+1}{7(11)-11} = \frac{34}{66} = \frac{17}{33} \text{（取 } n-1 = 10\text{）}$$

Sol(二)：

$$a_6 : b_6 = 11a_6 : 11b_6 = S_{11} : S'_{11} = (3\times 11+1):(7\times 11-11) = 17:33$$

3. 有兩個等差數列，其第 n 項的比爲 $(3n+1):(7n-11)$，則其前 9 項和的比爲__________。

Ans： $\dfrac{2}{3}$

解析：

Sol(一)

設此二等差數列各爲 $<a_n>$，$<b_n>$，其公差各爲 d，d'，前 n 項和各爲 S_n，S_n'，

則 $\dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{a_1 + (n-1)d}{b_1 + (n-1)d'} = \dfrac{3n+1}{7n-11}$ ，

$$\therefore \quad \frac{S_9}{S_9'} = \frac{\frac{9}{2}(2a_1 + 8d)}{\frac{9}{2}(2b_1 + 8d')} = \frac{a_1 + 4d}{b_1 + 4d'} = \frac{3(5)+1}{7(5)-11} = \frac{16}{24} = \frac{2}{3} \text{（取 } n-1 = 4\text{）}$$

Sol(二)：

$S_9 : S'_9 = 9a_5 : 9b_5 = a_5 : b_5 = (3\times 5+1):(7\times 5-11) = 2:3$

4. 設S_n表數列$< a_n >$的前n項的和，若$S_n = 2n^2 + n$，則此數列的第n項$a_n =$__________。

Ans： $a_n = 4n - 1$，$\forall n \in N$

解析：

$a_1 = S_1 = 2 \cdot 1^2 + 1 = 3$

$a_n = S_n - S_{n-1} = (2n^2 + n) - [2(n-1)^2 + (n-1)]$ ，$n \ge 2$

$= (2n^2 + n) - (2n^2 - 3n + 1) = 4n - 1$，$n \ge 2$

又$a_1 = 3 = 4 \cdot 1 - 1$。所以對任意自然數n都有$a_n = 4n - 1$

5. 將 10^6元以定期儲蓄存款方式存入銀行一年，年利率爲 6%，按月複利計息，已知$(1 + 0.5\%)^{12} = 1.061678$，則一年期滿可得本利和爲__________元。

Ans： 1061678

解析：

(1) $6\% \div 12 = 0.5\%$

(2)一個月後本利和爲 $10^6(1 + 0.5\%)$

二個月後本利和爲 $10^6(1 + 0.5\%)^2$

⋮

12 個月後，本利和爲 $10^6(1 + 0.5\%)^{12} = 1.061678 \times 10^6 = 1061678$（元）

6. (1) $< a_n >$爲一個等差數列，$a_{10} = 23$，$a_{25} = -22$，則 $a_n =$__________。

(2)接上題，若$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$爲最大時， n之值爲________。

Ans：(1) $53 - 3n$ (2) 17

解析：

設公差爲d，$a_{25} = a_{10} + (25 - 10)d$ ，$a_{25} - a_{10} = 15d$

$\therefore\ 15d = (-22) - 23 \quad \therefore\ d = -3$

$\therefore\ a_n = a_{25} + (n - 25)d = -22 + (n - 25)(-3) = 53 - 3n$

$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{n}{2}(50 + 53 - 3n) = \frac{n}{2}(103 - 3n) = -\frac{3}{2}(n - \frac{103}{6})^2 + \frac{3}{2}(\frac{103}{6})^2$

$\because\ \frac{103}{6} = 17 + \frac{1}{6}$ ，公差$d < 0 \quad \therefore$ 當$n = 17$ 時，S_n之值爲最大

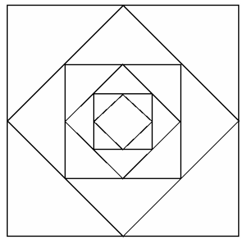
7. 規定 $\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$，則 $\sum_{k=1}^{n}(3k + 4)$ 之值爲__________。

Ans： $\frac{1}{2}n(3n + 11)$

解析：

$\sum_{k=1}^{n}(3k + 4) = 3\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 4 = 3(1 + 2 + 3 + \cdots + n) + 4n = 3(\frac{n(n+1)}{2}) + 4n = \frac{1}{2}n(3n + 11)$

8. 一正方形的邊長為 10 公分，以各邊中點為頂點連成的四邊形也是正方形，如此繼續作出五個由各邊中點為頂點連成的正方形，求下圖中六個正方形周長的總和________。

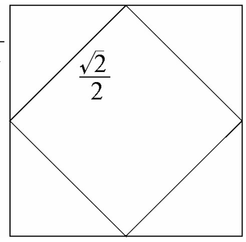


Ans：$70+35\sqrt{2}$

解析：

由畢氏定理知，

正方形各邊中點為頂點連成的正方形的周長為原正方形周長的 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 倍，此六個方形的周長為 40，$20\sqrt{2}$，20，$10\sqrt{2}$，10，$5\sqrt{2}$



等比數列首項為 40，公比為 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，故周長為

$$40\cdot\frac{1-(\frac{\sqrt{2}}{2})^6}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}=40\cdot\frac{1-\frac{1}{8}}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{70}{2-\sqrt{2}}=35(2+\sqrt{2})$$

9. 設一等差複數數列的首項是 $2+45i$，公差是 $1-3i$，若此數列的首n項和為S_n，則使S_n為實數的正整數$n=$________。

Ans：$n=31$

解析：

首n項和為$S_n=\dfrac{n}{2}[2\cdot(2+45i)+(n-1)(1-3i)]$

$$=\frac{n}{2}[(n+3)+(93-3n)i]=\frac{1}{2}n(n+3)+\frac{1}{2}n(93-3n)i$$

S_n為實數，則虛部$\dfrac{1}{2}n(93-3n)=0$，n為自然數，故取$n=31$

10. 有一等比數列$\langle a_n\rangle$，已知$S_n=16$，$S_{2n}=20$，則$S_{3n}=$________。

Ans：21

解析：

等比數列公比r，則首n項和、次n項和、再n項和、.....亦為等比數列且公比r^n

$S_n=a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}=16$

$S_{2n}-S_n=ar^n+ar^{n+1}+ar^{n+2}+\cdots+ar^{2n-1}=r^n(a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1})=16r^n$

$S_{3n}-S_{2n}=ar^{2n}+ar^{2n+1}+ar^{2n+2}+\cdots+ar^{3n-1}=r^n\cdot r^n(a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1})=16\cdot(r^n)^2$

∴ S_n，$S_{2n}-S_n$，$S_{3n}-S_{2n}$成G.P.，公比為r^n

即 16，4，$S_{3n}-20$ 成G.P. ∴ $S_{3n}=21$

11. 設有一等比數列，首項為 7，末項為 448，總和為 889，若此數列的公比為r，項數為n，則數對$(n，r)=$________。

Ans：(7，2)

解析：

設等比數列為$\langle a_n\rangle$，公比為r，S_n表前n項的和，則由$S_n=\dfrac{a_1-ra_n}{1-r}$，可得 $889=\dfrac{7-r\cdot 448}{1-r}$

$\therefore$ $889 - 889r = 7 - 448r$ $\therefore$ $441r = 882$，故得$r = 2$，再將$r = 2$代入$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$得
$448 = 7 \cdot 2^{n-1} \Leftrightarrow 64 = 2^{n-1}$，故得$n - 1 = 6$，亦即$n = 7$，所求數對$(n，r) = (7，2)$

12. 將正奇數由小而大排成一列分成n組，若第k組恰含k個數（$1 \le k \le n$），則第n組的首項爲__________，而第n組的各數的和爲__________。

Ans：$n^2 - n + 1$；n^3

解析：

第n組的首項爲全部的第 $1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + 1 = \dfrac{1}{2}n(n-1) + 1 = \dfrac{1}{2}(n^2 - n + 2)$項，所以第$n$組的首項爲 $2 \cdot \dfrac{1}{2}(n^2 - n + 2) - 1 = n^2 - n + 1$

第n組的末項爲全部的第 $1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n = \dfrac{1}{2}n(n+1)$項

所以第n組的末項爲 $2 \cdot \dfrac{1}{2}n(n+1) - 1 = n^2 + n - 1$

$\therefore$ 第n組各項的和爲$\dfrac{n}{2}[(n^2 - n + 1) + (n^2 + n - 1)] = n^3$

13. 設一級數的首項$a_1 = 2$且$a_{n+1} - a_n = 5$，若此級數前n項的和爲S_n，則第k項$a_k =$__________；而$S_{100} =$__________。

Ans：$5k - 3$，$\forall k \in N$；24950

解析：

因爲$a_{n+1} - a_n = 5$，故$\sum_{k=1}^{n} a_k$是公差爲 5 的等差級數。

首項$a_1 = 2$，第k項爲$a_k = a_1 + (k-1)d = 2 + (k-1) \cdot 5 = 5k - 3$

等差級數$S_{100} = \dfrac{100}{2}[2 \cdot 2 + (100 - 1) \cdot 5] = 50(4 + 495) = 24950$

14. 自 100 到 300 的正整數中，被 7 除餘 3 的數，它們的總和爲__________。

Ans：5771

解析：

$100 < 7k + 3 < 300$，$k \in Z$ $\Rightarrow$ $97 < 7k < 297$ $\Rightarrow$ $13\frac{6}{7} < k < 42\frac{3}{7}$

$\therefore$ $k = 14，15，\cdots，42$，$\therefore$ 總和$= \dfrac{29\,[(7 \times 14 + 3) + (7 \times 42 + 3)]}{2} = 5771$

15. 給定數列$\frac{1}{1}$，$\frac{2}{1}$，$\frac{1}{2}$，$\frac{3}{1}$，$\frac{2}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{4}{1}$，$\frac{3}{2}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{5}{1}$，$\frac{4}{2}$，$\frac{3}{3}$，$\frac{2}{4}$，$\frac{1}{5}$，$\cdots$，則$\frac{3}{10}$爲數列的第__________項。

Ans：76

解析：

找規則，得$\dfrac{3}{10}$得第 12 組，$(1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 11) + 10 = 76$ 個

16. 設一等比數列的第 3 項是 2，第 6 項是 16，則此數列的前 10 項總和爲__________。

Ans：$\dfrac{1023}{2}$

解析：

$$\begin{cases} ar^2 = 2 \cdots\cdots ① \\ ar^5 = 16 \cdots\cdots ② \end{cases}$$

$\dfrac{②}{①}$ 得 $r = 2$ 代入①得 $a = \dfrac{1}{2}$，$S_{10} = \dfrac{\frac{1}{2}(2^{10}-1)}{2-1} = \dfrac{1023}{2}$

17. 若 $\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{1+2}+\dfrac{1}{1+2+3}+\ \cdots\ +\dfrac{1}{1+2+3+\cdots+n}=\dfrac{21}{11}$，則自然數 n 之值=__________。

Ans：21

解析：

$$a_k = \frac{1}{\frac{k(k+1)}{2}} = \frac{2}{k(k+1)} = 2\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = 2\left[\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ \cdots\ +\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right] = 2\left(1-\frac{1}{n+1}\right) = \frac{21}{11}$$

$\therefore\ \ n = 21$

18. $1 + 2i + 3i^2 + 4i^3 +\ \cdots\ + 102i^{101} =$__________。

Ans：$51 + 52i$

解析：

$$\begin{aligned} S &= 1 + 2i + 3i^2 +\ \cdots\ + 102i^{101} \\ -)\ iS &= i + 2i^2 +\ \cdots\ + 101i^{101} + 102i^{102} \\ \hline S(1-i) &= 1 + i + i^2 +\ \cdots\ + i^{101} - 102i^{102} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow\ \ S(1-i) = \frac{1\cdot(i^{102}-1)}{i-1} + 102 \quad \Rightarrow\ \ S = 51 + 52i$$

19 一個球從 81 公尺自由落下，每次著地後又跳回原高度的 $\dfrac{1}{3}$ 再落下，當它第五次著地時，共經過__________公尺。

Ans：161

解析：

每次反彈的高度爲前高度的 $\dfrac{1}{3}$

第一次著地所經過的距離爲 81 公尺

第二次著地所經過的距離爲 $2 \times 81 \times \dfrac{1}{3}$ 公尺

第三次著地所經過的距離爲 $2 \times 81 \times (\dfrac{1}{3})^2$ 公尺

第四次著地所經過的距離爲 $2 \times 81 \times (\dfrac{1}{3})^3$ 公尺

第五次著地所經過的距離爲 $2\times 81\times (\frac{1}{3})^4$ 公尺

所求距離和

$= 81 + 2\times 81\times \frac{1}{3} + 2\times 81\times (\frac{1}{3})^2 + 2\times 81\times (\frac{1}{3})^3 + 2\times 81\times (\frac{1}{3})^4$

$= 81 + 162\,[\frac{1}{3} + (\frac{1}{3})^2 + (\frac{1}{3})^3 + (\frac{1}{3})^4]$

$= 81 + 162\times \frac{40}{81} = 81 + 80 = 161$

20. 設數列 $< a_n >$ 爲一等比數列，且 $a_5 = 4$，$a_7 = 9$，則第 10 項爲__________。

Ans：$\pm\frac{243}{8}$

解析：

設首項爲 a_1，公比爲 r，則 $\begin{cases} a_1 r^4 = 4 \cdots\cdots ① \\ a_1 r^6 = 9 \cdots\cdots ② \end{cases}$

$\frac{②}{①}$ 得 $r^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow r = \pm\frac{3}{2}$ 代入①得 $a_1 = \frac{64}{81}$，$a_{10} = a_1 \cdot r^9 = \frac{64}{81} \cdot (\pm\frac{3}{2})^9 = \pm\frac{243}{8}$

21. 等比數列 x，$3x+3$，$4x+4$，$\cdots$，求第 4 項爲__________（不可以 x 表示）。

Ans：$-\frac{64}{15}$

解析：

$\frac{3x+3}{x} = \frac{4x+4}{3x+3} \Rightarrow (3x+3)^2 = x(4x+4)$

$\Rightarrow 9x^2 + 18x + 9 = 4x^2 + 4x \Rightarrow 5x^2 + 14x + 9 = 0$

$\Rightarrow (5x+9)(x+1) = 0 \Rightarrow x = -\frac{9}{5}$ 或 $x = -1$

①當 $x = -\frac{9}{5}$ 時，公比 $r = \frac{3\cdot(-\frac{9}{5})+3}{-\frac{9}{5}} = \frac{4}{3}$

$a_4 = (-\frac{9}{5})\cdot(\frac{4}{3})^3 = (-\frac{9}{5})\cdot(\frac{64}{27}) = -\frac{64}{15}$

②當 $x = -1$ 時，公比 $r = \frac{3(-1)+3}{-1} = 0$（不合）

由①，②知 $a_4 = -\frac{64}{15}$

22. 一正三角形，邊長爲 96，作其內切圓 C_1，然後作 C_1 的內接正三角形，再作其內切圓 C_2，依此類推，繼續得到圓 C_3，$\cdots$，C_7，求 C_7 的半徑爲__________。

Ans：$\frac{\sqrt{3}}{4}$

解析：

設 R_i 表內切圓 C_i 的半徑，則 $R_1 = 16\sqrt{3}$，$R_2 = 8\sqrt{3}$，$\cdots$

$\Rightarrow$　$<R_i>$的公比$r=\dfrac{R_2}{R_1}=\dfrac{1}{2}$，故$R_7=R_1\cdot R^6=16\sqrt{3}\cdot(\dfrac{1}{2})^6=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

23.設三正數成等比數列，其和為 39。若此三數依次減去 1、2、12 後，則成等差數列，求此三數。

Ans： 4，10，25

解析：

由題意知各數減去 1，2，12 後成等差數列，令三數為$a-d+1$，$a+2$，$a+d+12$

由已知可得$\begin{cases}(a-d+1)+(a+2)+(a+d+12)=39\cdots\cdots①\\(a+2)^2=(a-d+1)\cdot(a+d+12)\quad\cdots\cdots②\end{cases}$

由①得 $3a+15=39$　∴　$a=8$ 代入②

則得$(8+2)^2=(8-d+1)\cdot(8+d+12)$　∴　$d^2+11d-80=0$

解之，得$d=5$ 或$d=-16$

1°若$d=5$，則此三數為 4，10，25

2°若$d=-16$，則此三數為 25，10，4

綜合 1°與 2°討論知，此三數為 4，10，25

24. 有二等差數列$<a_n>=<3，8，13，18，\cdots，373>$。$<b_n>=<2，9，16，23，\cdots，373>$。由這兩組數列的所有共同項依序排列得另一數列$<c_n>$共有$k$項，求(1) c_1之值。　(2) $c_1+c_2+\cdots+c_k$之和。

Ans： (1)23　(2)2178

解析：

∵　$<a_n>=<3，8，13，18，23，\cdots，373>$之首項為 3，公差為 5

$<b_n>=<2，9，16，23，\cdots，373>$之首項為 2，公差為 7

∴　$<c_n>=<23，58，\cdots，373>$之首項為 23，公差為 35

$c_1=23$

$c_k=373$　∴　$23+(k-1)\cdot35=373$　$\Rightarrow$　$35k=385$

∴　$k=11$

故$c_1+c_2+c_3+\cdots+c_k=\dfrac{11}{2}(c_1+c_{11})=\dfrac{11}{2}(23+373)=2178$

25. $1+\dfrac{3}{2}+\dfrac{5}{2^2}+\dfrac{7}{2^3}+\cdots+\dfrac{2n-1}{2^{n-1}}$之和。

Ans：$6-\dfrac{2n+3}{2^{n-1}}$

解析：

令 $S=1+\dfrac{3}{2}+\dfrac{5}{2^2}+\dfrac{7}{2^3}+\cdots+\dfrac{2n-1}{2^{n-1}}\cdots\cdots①$

則得$\dfrac{1}{2}S=\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2^2}+\dfrac{5}{2^3}+\cdots+\dfrac{2n-3}{2^{n-1}}+\dfrac{2n-1}{2^n}\cdots\cdots②$

由①－②，可得$\frac{1}{2}S=1+\frac{2}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{2}{2^3}+\cdots+\frac{2}{2^{n-1}}-\frac{2n-1}{2^n}$

$=1+(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-2}})-\frac{2n-1}{2^n}=1+\frac{1-(\frac{1}{2})^{n-1}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{2n-1}{2^n}$

$=1+2(1-\frac{1}{2^{n-1}})-\frac{2n-1}{2^n}=3-\frac{1}{2^{n-2}}-\frac{2n-1}{2^n}$

$\therefore\ S=6-\frac{2}{2^{n-2}}-\frac{2n-1}{2^{n-1}}=6-\frac{2n+3}{2^{n-1}}$