高雄市明誠中學 高一數學平時測驗 日期：93.06.17					
範圍	3-5 正餘弦的疊合	班級		姓名	
		座號			

一、選擇題(每題 10 分)

1. (複選) $\frac{\pi}{12} \le \theta \le \frac{3\pi}{4}$ ，若 $f(\theta) = 3\sin^2\theta + 4\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta - \cos^2\theta$ 可化成 $a\sin(2\theta - b) + c$，

 $0 < b < \frac{\pi}{2}$ ，且當 $\theta = \alpha$ 時，$f(\theta)$ 有最大值 β，則

 (A) $a = 4$ (B) $b = \frac{\pi}{6}$ (C) $c = 1$ (D) $\alpha = \frac{\pi}{3}$ (E) $\beta = 5$

答案：(A)(B)(C)(D)(E)

解析：降次

$f(\theta) = 3\sin^2\theta + 4\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta - \cos^2\theta = 3(\frac{1-\cos 2\theta}{2}) + 2\sqrt{3}\sin 2\theta - \frac{1+\cos 2\theta}{2}$

$= 2\sqrt{3}\sin 2\theta - 2\cos 2\theta + 1 = 4(\sin 2\theta\frac{\sqrt{3}}{2} - \cos 2\theta\frac{1}{2}) + 1$

$= 4\sin(2\theta - \frac{\pi}{6}) + 1 = a\sin(2\theta - b) + c$

$\therefore$ $a = 4$，$b = \frac{\pi}{6}$ ，$c = 1$

又 $\frac{\pi}{12} < \theta \le \frac{3\pi}{4}$ $\Rightarrow$ $\frac{\pi}{6} < 2\theta \le \frac{3\pi}{2}$ $\Rightarrow$ $0 \le 2\theta - \frac{\pi}{6} \le \frac{4\pi}{3}$ 畫圖 $\Rightarrow -\frac{\sqrt{3}}{2} \le \sin(2\theta - \frac{\pi}{6}) \le 1$

當 $\sin(2\theta - \frac{\pi}{6}) = 1 \Rightarrow$ $f(\theta) = 4 + 1 = 5$ 爲最大值

此時 $2\theta - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow$ 即 $\theta = \frac{\pi}{3} \Rightarrow$ $\alpha = \frac{\pi}{3}$ ，$\beta = 5$

2. 關於函數 $y = \sin x - \cos x$ 之圖形(複選)

 (A)週期爲 2π (B)週期爲 π (C) y 之最大值爲 2 (D) y 之最大值爲 $\sqrt{2}$ (E)對稱於原點

答案：(A)(D)

$y = \sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin(x - \frac{\pi}{4})$，週期爲 2π 且 $-\sqrt{2} \le y \le \sqrt{2}$

二、填充題(每題 10 分)

3. 求下列各式之最大值或最小值：

 (1) $\theta \in R$，$f(\theta) = 2\cos\theta - 3\sin\theta$ 的最小值 =__________。

 (2) $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le 0$，$f(\theta) = 2\cos^2\theta - 3\sin\theta$ 的最大值 =__________。

答案：(1) $-\sqrt{13}$ (2) $\frac{25}{8}$

解析：(1) $f(\theta) = 2\cos\theta - 3\sin\theta$，$\theta \in R$

$\Rightarrow$ $-\sqrt{2^2 + (-3)^2} \le f(\theta) \le \sqrt{2^2 + (-3)^2}$ $\Rightarrow$ $-\sqrt{13} \le f(\theta) \le \sqrt{13}$ ，最小值爲 $-\sqrt{13}$

(2) $f(\theta)=2\cos^2\theta-3\sin\theta$

$=2\,(1-\sin^2\theta)-3\sin\theta$

$=-2\sin^2\theta-3\sin\theta+2$

$=(-2)\,(\sin\theta+\dfrac{3}{4}\ )^2+\dfrac{25}{8}$

$-\dfrac{\pi}{2}\leq\theta\leq 0\quad\Rightarrow\quad -1\leq\sin\theta\leq 0$，當$\sin\theta=-\dfrac{3}{4}$時，$f(\theta)$有最大值爲$\dfrac{25}{8}$

4. 設 $0\leq x\leq\pi$，$f(x)=3+\cos x-\cos(\dfrac{\pi}{3}-x)$，當$x=\alpha$ 時有最大值M，當$x=\beta$ 時有最小值 m，則 $\alpha+\beta=$__________。 $M+m=$__________。

答案：(1) $\dfrac{2\pi}{3}$ (2) $\dfrac{11}{2}$

解析：

(1) $f(x)=3+\cos x-\cos(\dfrac{\pi}{3}-x)=3+\cos x-[\cos\dfrac{\pi}{3}\cos x+\sin\dfrac{\pi}{3}\sin x]$

$=3+(\cos x\cdot\dfrac{1}{2}-\sin x\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2})=3+\cos(x+\dfrac{\pi}{3})$

$0\leq x\leq\pi$，$\dfrac{\pi}{3}\leq x+\dfrac{\pi}{3}\leq\dfrac{4\pi}{3}$ 畫圖$\Rightarrow$ $-1\leq\cos(x+\dfrac{\pi}{3})\leq\dfrac{1}{2}$

$\begin{cases}\cos(x+\dfrac{\pi}{3})=\dfrac{1}{2}\text{，即 } x=a=0\text{ 時，有最大值 } M=\dfrac{7}{2}\\ \cos(x+\dfrac{\pi}{3})=-1\text{，即 } x=\beta=\dfrac{2\pi}{3}\text{ 時，有最小值 } m=2\end{cases}\quad\therefore\quad\begin{cases}\alpha+\beta=\dfrac{2\pi}{3}\\ M+m=\dfrac{11}{2}\end{cases}$

5. 設a，$x\in R$，若$\cos x+a=1+2\sin x$，則a之最大值 $=$__________。

答案：$1+\sqrt{5}$

解析： 經整理 $a-1=2\sin x-\cos x=\sqrt{5}\sin(x-\theta)$， 所以 $-\sqrt{5}\leq a-1\leq\sqrt{5}$

$\Rightarrow\quad 1-\sqrt{5}\leq a\leq 1+\sqrt{5}$

6. $f(x)=\dfrac{\sin x}{1-\sin x}$，$0\leq x\leq\dfrac{\pi}{4}$的最大值爲__________。

答案：$\sqrt{2}+1$

解析：

令 $y=\dfrac{\sin x}{1-\sin x}=-1+\dfrac{1}{1-\sin x}$

$\because\quad 0\leq x\leq\dfrac{\pi}{4}\Rightarrow 0\leq\sin x\leq\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow 1\geq 1-\sin x\geq 1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow\ 1\leq\dfrac{1}{1-\sin\theta}\leq\dfrac{1}{1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}}\quad\Rightarrow 1\leq\dfrac{1}{1-\sin\theta}\leq\sqrt{2}+2\Rightarrow\ 0\leq y\leq\sqrt{2}+1$，最大值爲$\sqrt{2}+1$

6. 函數$f(x)=\dfrac{2\cos x}{3+\sin x}$的最大值爲__________，最小值爲__________。

答案：$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$； $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

解析：

令$k=\dfrac{2\cos x}{3+\sin x}$ ∴ $k(3+\sin x)=2\cos x$ ⇒ $2\cos x-k\sin x=3k$

$\Rightarrow \sqrt{2^2+(-k)^2}[\cos x\cdot\dfrac{2}{\sqrt{4+k^2}}-\sin x\cdot\dfrac{k}{\sqrt{4+k^2}}]=3k$

$\Rightarrow \sqrt{4+k^2}\cos(x+\theta)=3k\Rightarrow\cos(x+\theta)=\dfrac{3k}{\sqrt{4+k^2}}$

因爲x爲任意實數，$-1\le\cos(x+\theta)\le1\Rightarrow|\cos(x+\theta)|\le1\Rightarrow|\dfrac{3k}{\sqrt{4+k^2}}|\le1$

$\Rightarrow|3k|\le|\sqrt{4+k^2}|$ ⇔ $9k^2\le4+k^2$

∴ $8k^2\le4$ ⇒ $k^2\le\dfrac{1}{2}$，所以 $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\le k\le\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，故最大值爲$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，而最小值爲 $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

7. 設$f(x)=\cos x(\cos x-\sin x)$，$0\le x<2\pi$，則

(1) $f(x)$之最小值爲__________。 (2) $f(x)$有最小值時，$x=$__________。

答案：(1) $\dfrac{1-\sqrt{2}}{2}$ (2) $\dfrac{3\pi}{8}$

$f(x)=\cos x(\cos x-\sin x)=\cos^2x-\cos x\sin x$

$=\dfrac{1+\cos2x}{2}-\dfrac{\sin2x}{2}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}(\cos2x-\sin2x)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos(2x+\dfrac{\pi}{4})$

∵ $0\le x\le\pi$ ⇒ $0\le2x\le2\pi$ ⇒ $\dfrac{\pi}{4}\le2x+\dfrac{\pi}{4}\le\dfrac{9\pi}{4}$

⇒ $-1\le\cos(2x+\dfrac{\pi}{4})\le1$ ⇒ $\dfrac{1-\sqrt{2}}{2}\le f(x)\le\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$

故$f(x)$之最小值爲$\dfrac{1-\sqrt{2}}{2}$，且此時 $2x+\dfrac{\pi}{4}=\pi$，即$x=\dfrac{3\pi}{8}$

8. $y=\cos x-\sqrt{3}\sin x$化爲$y=2\sin(\alpha-x)$，$0\le\alpha<2\pi$，求$\alpha=$__________。

答案：$\dfrac{\pi}{6}$

解析：$y=\cos x-\sqrt{3}\sin x=2(\dfrac{1}{2}\cos x-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x)=2\sin(\dfrac{\pi}{6}-x)$ ∴ $\alpha=\dfrac{\pi}{6}$

9.$(\sqrt{2}+1)\sin x-(\sqrt{2}-1)\cos x+1$ 之最大值 = __________。

答案：$1+\sqrt{6}$

解析：$M=1+\sqrt{(\sqrt{2}+1)^2+(\sqrt{2}-1)^2}=1+\sqrt{6}$

10.設$\sqrt{3}\sin2x+2\cos^2x$的最大值爲M，最小值爲m，則$M+m=$__________。

答案：2

解析：$\sqrt{3}\sin2x+2\cos^2x=\sqrt{3}\sin2x+\cos2x+1$

$=2(\sin2x\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\cos2x\cdot\dfrac{1}{2})+1=2(\sin2x\cos\dfrac{\pi}{6}+\cos2x\sin\dfrac{\pi}{6})+1=2\sin(2x+\dfrac{\pi}{6})+1$

∴ $M=3$，$m=-1$ ⇒ $M+m=2$

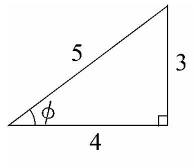
11.設 $0\le x\le\dfrac{\pi}{2}$，$y=3\cos x+4\sin x$，求

(1) y有最大值時，$\cos x=$__________。 (2) y之最小值__________。

答案：(1)$\frac{3}{5}$　(2) 3

解析：

$y=3\cos x+4\sin x=5(\sin x\cdot\frac{4}{5}+\cos x\cdot\frac{3}{5})=5(\sin x\cos\phi+\cos x\sin\phi)$，　其中



$=5\sin(x+\phi)$　，

因爲　$\phi\le x+\phi\le\frac{\pi}{2}+\phi\Rightarrow\sin\phi\le\sin(x+\phi)\le 1$

當 $\sin(x+\phi)=1$，　Max　$y=5$，此時　$x+\phi=\frac{\pi}{2}$　$\Rightarrow x=\frac{\pi}{2}-\phi$，$\cos x=\cos(\frac{\pi}{2}-\phi)=\sin\phi=\frac{3}{5}$

當 $\sin(x+\phi)=\sin\phi$，即 $x=0$ 時，min =　$5\cdot\sin\phi=5\cdot\frac{3}{5}=3$

12.$f(x)=(\sin x+\cos x)^2+4(\sin x+\cos x)$，則

(1)$f(x)$之最小值爲＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿。　(2)$f(x)$之最大值爲＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿。

答案：(1) $2-4\sqrt{2}$　(2) $2+4\sqrt{2}$

解析：

令$t=\sin x+\cos x$

因爲$t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\cdot\sin(x+\frac{\pi}{4})\Rightarrow-\sqrt{2}\le t\le\sqrt{2}$

$f(x)=(\sin x+\cos x)^2+4(\sin x+\cos x)\ =\ t^2+4t=(t+2)^2-4$

$-\sqrt{2}\le t\le\sqrt{2}\quad\Rightarrow\quad-\sqrt{2}+2\le\ t+2\le\sqrt{2}+2$

$\Rightarrow\quad 6-4\sqrt{2}\le\ (t+2)^2\ \le 6+4\sqrt{2}\quad\Rightarrow\quad 2-4\sqrt{2}\le f(x)\le 2+4\sqrt{2}$

故$f(x)$之最小值爲 $2-4\sqrt{2}$ ，最大值爲 $2+4\sqrt{2}$

13.求$\csc10°-\sqrt{3}\sec10°$之值 ＝＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿。

答案：4

解析：

$$\csc10°-\sqrt{3}\sec10°=\frac{1}{\sin10°}-\frac{\sqrt{3}}{\cos10°}=\frac{\cos10°-\sqrt{3}\sin10°}{\sin10°\cos10°}=\frac{2(\frac{1}{2}\cos10°-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin10°)}{\frac{1}{2}\sin20°}$$

$$=\frac{2(\sin30°\cos10°-\cos30°\sin10°)}{\frac{1}{2}\sin20°}=\frac{2\sin20°}{\frac{1}{2}\sin20°}=4$$

14.設$f(x)=\sin x-\cos x$，$0\le x<2\pi$，

(1)若$f(x)=\sqrt{2}$ ，則$x=$＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿。　(2)若 $1\le f(x)\le\sqrt{2}$ ，則x的範圍是＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿。

答案：(1)$\frac{3\pi}{4}$　(2)$\frac{\pi}{2}\le x\le\pi$

$f(x)=\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4})$

(1)$f(x)=\sqrt{2}\quad\Rightarrow\quad\sin(x-\frac{\pi}{4})=1\quad\Rightarrow\quad x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}\quad\Rightarrow\quad x=\frac{3\pi}{4}$

(2)$\because$ $1 \le f(x) \le \sqrt{2}$ $\Rightarrow$ $1 \le \sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4}) \le \sqrt{2}$ $\Rightarrow$ $\frac{1}{\sqrt{2}} \le \sin(x-\frac{\pi}{4}) \le 1$

$\Rightarrow$ $\frac{\pi}{4} \le x-\frac{\pi}{4} \le \frac{3\pi}{4}$ $\Rightarrow$ $\frac{\pi}{2} \le x \le \pi$

15.$\frac{\pi}{12} \le \theta \le \frac{3\pi}{4}$ 且 $3\sin^2\theta + 4\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta - \cos^2\theta = 5$，則$\theta =$ ＿＿＿＿＿＿。

答案：$\frac{\pi}{3}$

解析：

$3\sin^2\theta + 4\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta - \cos^2\theta = 5$ $\Rightarrow$ $3(\frac{1-\cos 2\theta}{2}) + 2\sqrt{3}\sin 2\theta - \frac{1+\cos 2\theta}{2} = 5$

$\Rightarrow$ $2\sqrt{3}\sin 2\theta - 2\cos 2\theta = 4$ $\Rightarrow$ $\sin 2\theta \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \cos 2\theta \cdot \frac{1}{2} = 1$ $\Rightarrow$ $\sin(2\theta - \frac{\pi}{6}) = 1$

因爲$\frac{\pi}{12} \le \theta \le \frac{3\pi}{4} \Rightarrow \frac{\pi}{6} \le 2\theta \le \frac{3\pi}{2} \Rightarrow 0 \le 2\theta - \frac{\pi}{6} \le \frac{4\pi}{3}$，$\therefore$ $2\theta - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$

16.設$\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{3\pi}{4}$，試求函數$f(x) = \frac{\sin x \cos x}{1+\sin x + \cos x}$的最大值與最小值。

答案：最大値爲$\frac{\sqrt{2}-1}{2}$，最小値爲 $-\frac{1}{2}$

解析：

令$t = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \cdot \sin(x+\frac{\pi}{4})$ $\because$ $\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{3\pi}{4}$ $\therefore$ $\frac{\pi}{2} \le x + \frac{\pi}{4} \le \pi$

故 $0 \le \sin(x+\frac{\pi}{4}) \le 1$，亦即 $0 \le t \le \sqrt{2}$，又$t^2 = 1 + 2\sin x \cdot \cos x$，所以$\sin x \cdot \cos x = \frac{t^2-1}{2}$

將$\sin x \cdot \cos x$及$\sin x + \cos x$分別用$\frac{1}{2}(t^2-1)$及t代入$f(x)$

則$f(x) = \frac{\frac{1}{2}(t^2-1)}{1+t}$ $\therefore$ $f(x) = \frac{1}{2}(t-1)$，其中 $0 \le t \le \sqrt{2}$

(1)當$t = 0$ 時，$f(x)$有最小値 $-\frac{1}{2}$，即$f(x)$有最小値 $-\frac{1}{2}$

(2)當$t = \sqrt{2}$ 時，$f(x)$有最大値$\frac{\sqrt{2}-1}{2}$，即$f(x)$有最大値 $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$