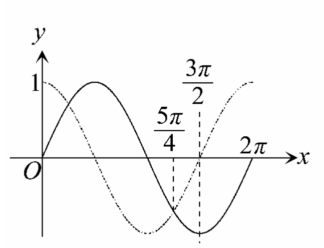
高雄市明誠中學 高一數學平時測驗 日期：93.06.10					
範圍	3-3,4 倍角半角積與和差互化公式	班級		姓名	
		座號			

一. 選擇題(每題 10 分)



1. 設$\frac{3\pi}{2}<\theta<\frac{7\pi}{4}$，則$\sqrt{1+\sin 2\theta}-\sqrt{1-\sin 2\theta}$ =

(A) $2\sin\theta$ (B) $2\cos\theta$ (C) $2\sin2\theta$ (D) $-2\sin\theta$ (E) $-2\cos\theta$

答案：(E)

解析：

$\because$ $\sqrt{1+\sin 2\theta}-\sqrt{1-\sin 2\theta}$

$=\sqrt{\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta}-\sqrt{\sin^2\theta+\cos^2\theta-2\sin\theta\cos\theta}$

$=\sqrt{(\sin\theta+\cos\theta)^2}-\sqrt{(\sin\theta-\cos\theta)^2}=|\sin\theta+\cos\theta|-|\sin\theta-\cos\theta|$

由右上 $y=\sin x$，$y=\cos x$ 的圖形，知$\frac{3\pi}{2}<\theta<\frac{7\pi}{4}$時， $\cos\theta>0>\sin\theta$，且$|\cos\theta|<|\sin\theta|$

$\therefore$ $\sin\theta+\cos\theta<0$，$\sin\theta-\cos\theta<0$

$\therefore$ 原式 $=-(\sin\theta+\cos\theta)+(\sin\theta-\cos\theta)=-2\cos\theta$

2. $\sin52.5°+\sin7.5°=$

(A) sin22.5° (B) cos22.5° (C) sin11.25° (D) cos11.25° (E) cos5.625°

答案：(B)

解析：$\sin52.5°+\sin7.5°=2\sin\frac{52.5°+7.5°}{2}\cos\frac{52.5°-7.5°}{2}=2\sin30°\cos22.5°=\cos22.5°$

3. 設$x+y=\frac{\pi}{6}$，則$\cos^2x+\sin^2y$的最大值爲

(A)$\frac{3}{2}$ (B)$\frac{\sqrt{3}}{2}$ (C)$\frac{\sqrt{2}}{2}$ (D)$\sqrt{3}$ (E) 2

答案：(A)

解析：$\cos^2x+\sin^2y=\frac{1}{2}(1+\cos2x)+\frac{1}{2}(1-\cos2y)=1+\frac{1}{2}(\cos2x-\cos2y)$

$=1+\frac{1}{2}[-2\sin(x+y)\sin(x-y)]=1-\frac{1}{2}\sin(x-y)=1-\frac{1}{2}\sin(2x-\frac{\pi}{6})$

$\therefore$ 當$\sin(2x-\frac{\pi}{6})=-1$時，最大值爲$\frac{3}{2}$

二、填充題(每題 10 分)

4. 以$x-\cos40°$除$f(x)=4x^3-3x$之餘式爲__________。

答案：$-\frac{1}{2}$

解析：由餘式定理以$x-\cos40°$除$f(x)=4x^3-3x$的餘式爲$f(\cos40°)$

$f(\cos40°)=4\cos^340°-3\cos40°=\cos(3\times40°)=\cos120°=-\frac{1}{2}$

5. 設$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$，$\tan\theta=-\frac{3}{4}$，則

(1) $\tan 2\theta$ = ________。 (2) $\sin 2\theta$=__________。 (3)$\tan\frac{\theta}{2}$ = __________。

(4)$\sin\frac{\theta}{2}$=__________， (5)$\sin 3\theta$=__________。

答案：(1) $-\frac{24}{7}$ (2) $\frac{-24}{25}$ (3) 3 (4) $\frac{3}{\sqrt{10}}$ (5)$\frac{117}{125}$

解析：

(1) $\tan 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\frac{2(-\frac{3}{4})}{1-(-\frac{3}{4})^2}=-\frac{24}{7}$ (2) $\sin 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}=\frac{2\cdot(-\frac{3}{4})}{1+(-\frac{3}{4})^2}=\frac{-24}{25}$

(3)$\because$ $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$且 $\tan\theta=-\frac{3}{4}\Rightarrow\sin\theta=\frac{3}{5}$，$\cos\theta=-\frac{4}{5}$，$\tan\frac{\theta}{2}=\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}=\frac{\frac{3}{5}}{1-\frac{4}{5}}=3$

(4) $\because\frac{\pi}{4}<\frac{\theta}{2}<\frac{\pi}{2}\Rightarrow\sin\frac{\theta}{2}=+\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}=\sqrt{\frac{1-(-\frac{4}{5})}{2}}=\frac{3}{\sqrt{10}}$

(5) $\sin 3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta=3(\frac{3}{5})-4(\frac{3}{5})^3=\frac{117}{125}$

6. sin112.5°之值 = __________。

答案：$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

解析：$\sin 112.5°=\sin\frac{225°}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos 225°}{2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

7. 求值： $\cos^4\frac{\pi}{8}+\cos^4\frac{3\pi}{8}+\cos^4\frac{5\pi}{8}+\cos^4\frac{7\pi}{8}$ = __________。]

答案： $\frac{3}{2}$

(1)原式 $=\cos^4\frac{\pi}{8}+\cos^4\frac{3\pi}{8}+\cos^4\frac{3\pi}{8}+\cos^4\frac{\pi}{8}=2(\cos^4\frac{\pi}{8}+\cos^4\frac{3\pi}{8})$

$=2[(\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2})^2+(\frac{1+\cos\frac{3\pi}{4}}{2})^2]$

$=2[(\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2})^2+(\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2})^2]=\frac{3}{2}$

8. $12\sin\theta+5\cos\theta=0$，$\frac{3\pi}{2}<\theta<2\pi$，求(1) $\tan 2\theta$= ________。(2) $\cos\frac{\theta}{2}$= ______。

答案：(1)$-\frac{120}{119}$ (2) $-\frac{5}{\sqrt{26}}$

解析：

(1) $12\sin\theta+5\cos\theta=0 \quad\Rightarrow\quad 12\sin\theta=-5\cos\theta$，$\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\tan\theta=-\dfrac{5}{12}$

$$\tan2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\frac{\frac{-5}{6}}{1-\frac{25}{144}}=-\frac{5}{6}\times\frac{144}{119}=-\frac{120}{119}$$

(2)$\because\ \dfrac{3}{2}\pi<\theta<2\pi \quad\therefore\quad \cos\theta>0 \quad\Rightarrow\quad \cos\theta=\dfrac{12}{13}$，

又$\dfrac{3\pi}{4}<\dfrac{\theta}{2}<\pi$，$\cos\dfrac{\theta}{2}<0\Rightarrow\cos\dfrac{\theta}{2}=-\sqrt{\dfrac{1+\cos\theta}{2}}=-\sqrt{\dfrac{1+\frac{12}{13}}{2}}=-\dfrac{5}{\sqrt{26}}$

9. $4\sin20°+\tan20°=$ ＿＿＿＿＿＿ 。

答案：$\sqrt{3}$

解析：

$$4\sin20°+\tan20°=4\sin20°+\frac{\sin20°}{\cos20°}=\frac{4\sin20°\cos20°+\sin20°}{\cos20°}=\frac{2\sin40°+\sin20°}{\cos20°}$$

$$=\frac{\sin40°+(\sin40°+\sin20°)}{\cos20°}=\frac{\sin40°+2\sin30°\cos10°}{\cos20°}$$

$$=\frac{\sin40°+\cos10°}{\cos20°}=\frac{\cos50°+\cos10°}{\cos20°}=\frac{2\cos30°\cos20°}{\cos20°}=2\cos30°=\sqrt{3}$$

10. $\sin23°\cos112°-\sin292°\sin67°=$ ＿＿＿＿＿＿ 。

答案：$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

解析：原式$=-\sin23°\cos68°+\sin68°\cos23°=\sin(68°-23°)=\sin45°=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

11. $\sin37.5°\sin7.5°$之值爲＿＿＿＿＿＿ 。

答案：$\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{4}$

解析：原式 $=\dfrac{1}{2}(\cos30°-\cos45°)=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{4}$

12. $\dfrac{\sin(\theta+\frac{\pi}{4})\sin(\theta-\frac{\pi}{4})}{\sin^2\theta-\cos^2\theta}=$ ＿＿＿＿＿＿ 。

答案：$\dfrac{1}{2}$

解析：原式 $=\dfrac{\sin^2\theta-\sin^2\frac{\pi}{4}}{\sin^2\theta-(1-\sin^2\theta)}=\dfrac{\sin^2\theta-\frac{1}{2}}{2\sin^2\theta-1}=\dfrac{1}{2}$

13. 化簡$\cos108°\cos132°+\cos132°\cos12°+\cos12°\cos108°$之值爲＿＿＿＿＿＿ 。

答案：$-\dfrac{3}{4}$

解析：原式$=\dfrac{1}{2}(2\cos108°\cos132°+2\cos132°\cos12°+2\cos12°\cos108°)$

$=\frac{1}{2}(\cos240° + \cos24° + \cos144° + \cos120° + \cos120° + \cos96°)$

$=\frac{1}{2}(-\frac{3}{2} + \cos24° + \cos144° + \cos96°) = -\frac{3}{4} + \frac{1}{2}(2\cos84°\cos60° - \cos84°)$

$= -\frac{3}{4} + \frac{1}{2}(\cos84° - \cos84°) = -\frac{3}{4}$

14.$\sin^2 10° + \cos^2 20° - \sin10°\cos20° =$ ＿＿＿＿＿＿ 。

答案：$\frac{3}{4}$

解析：降次

$\sin^2 10° + \cos^2 20° - \sin10°\cos20° = \frac{1-\cos20°}{2} + \frac{1+\cos40°}{2} - \sin10°\cos20°$

$= 1 + \frac{1}{2}(\cos40° - \cos20°) - \frac{1}{2}(2\sin10°\cos20°) = 1 + \frac{1}{2}(-2\sin30°\sin10°) - \frac{1}{2}(\sin30° - \sin10°)$

$= 1 - \frac{1}{2}\sin10° - \frac{1}{2}(\frac{1}{2} - \sin10°) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

15.$\sin20°\sin40°\sin80°$之值爲＿＿＿＿＿＿ 。

答案：$\frac{\sqrt{3}}{8}$

解析：原式 $= \sin20° \cdot \frac{1}{2}(\cos40° - \cos120°) = \sin20° \cdot \frac{1}{2}(\cos40° + \frac{1}{2})$

$= \frac{1}{2}\cos40°\sin20° + \frac{1}{4}(\sin60° - \sin20°) + \frac{1}{4}\sin20° = \frac{1}{4}\sin60° = \frac{\sqrt{3}}{8}$

16.設$\tan x = \frac{\cos81° + \sin43°}{\sin81° - \cos43°}$ 。

(1) $0° < x < 180°$時，$x =$ ＿＿＿＿＿＿ 。 (2) $180° < x < 360°$時，$x =$ ＿＿＿＿＿＿ 。

答案：(1)73° (2) 253°

解析：$\tan x = \frac{\cos81° + \sin43°}{\sin81° - \cos43°} = \frac{\cos81° + \cos47°}{\sin81° - \sin47°} = \frac{2\cos64°\cos17°}{2\cos64°\sin17°} = \cot17° = \tan73°$

即第一、三象限的 73°

(1)∵ $0° < x < 180°$ ∴ $x = 73°$

(2)∵ $180° < x < 360°$ ∴ $x = 253°$

17.$f(x) = \sin x\sin(60° - x)\sin(60° + x)$的最大值爲＿＿＿＿＿＿ 。

答案：$\frac{1}{4}$

解析：$f(x) = \sin x\sin(60° - x)\sin(60° + x) = -\frac{1}{2}\sin x[-2\sin(60° - x)\sin(60° + x)]$

$= -\frac{1}{2}\sin x(\cos120° - \cos2x) = \frac{1}{4}\sin x + \frac{1}{2}\sin x\cos2x$

$= \frac{1}{4}\sin x + \frac{1}{2}\sin x(1 - 2\sin^2 x) = \frac{3}{4}\sin x - \sin^3 x = \frac{1}{4}(3\sin x - 4\sin^3 x) = \frac{1}{4}\sin3x$

∴ 當$\sin3x = 1$ 時，$f(x)$有最大值爲$\frac{1}{4}$

【公式】

(1) $\sin x\sin(60°-x)\sin(60°+x)=\dfrac{1}{4}\sin 3x$

(2) $\cos x\cos(60°-x)\cos(60°+x)=\dfrac{1}{4}\cos 3x$

(3)利用(1)(2)很快求得$\sin 20°\sin 40°\sin 80°=\dfrac{\sqrt{3}}{8}$，$\cos 20°\cos 40°\cos 80°=\dfrac{1}{8}$

18.$\sin^2 27.5°+\sin^2 32.5°+\sin^2 87.5°=$ ＿＿＿＿＿＿。

答案：$\dfrac{3}{2}$

解析：$\sin^2 27.5°+\sin^2 32.5°+\sin^2 87.5°=\dfrac{1-\cos 55°}{2}+\dfrac{1-\cos 65°}{2}+\dfrac{1-\cos 175°}{2}$

$=\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}[(\cos 55°+\cos 65°)+\cos 175°]=\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}[2\cos 60°\cos 5°+(-\cos 5°)]$

$=\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}(2\times\dfrac{1}{2}\times\cos 5°-\cos 5°)=\dfrac{3}{2}-0=\dfrac{3}{2}$

19.已知$\sin\alpha+\sin\beta=\dfrac{3}{5}$，$\cos\alpha+\cos\beta=\dfrac{1}{5}$，則

(1) $\tan\dfrac{\alpha+\beta}{2}=$ ＿＿＿＿＿＿。　(2) $\cos(\alpha+\beta)=$ ＿＿＿＿＿＿。

答案：(1)3　(2)$\dfrac{-4}{5}$

解析：

(1)∵ $\sin\alpha+\sin\beta=\dfrac{3}{5}$　∴ $2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}=\dfrac{3}{5}$ ……①

∵ $\cos\alpha+\cos\beta=\dfrac{1}{5}$　∴ $2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}=\dfrac{1}{5}$ ……②

$\dfrac{①}{②}$得 $\dfrac{\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}}=\dfrac{\frac{3}{5}}{\frac{1}{5}}$　$\Rightarrow$　$\tan\dfrac{\alpha+\beta}{2}=3$

(2) $\cos(\alpha+\beta)=\dfrac{1-\tan^2\dfrac{\alpha+\beta}{2}}{1+\tan^2\dfrac{\alpha+\beta}{2}}=\dfrac{1-9}{1+9}=-\dfrac{4}{5}$

20.$\sin\theta$，$\cos\theta$ 爲$x^2+px+q=0$ 之二根，試以p，q表 $2\sin^2\dfrac{\theta}{2}(\cos\dfrac{\theta}{2}-\sin\dfrac{\theta}{2})^2=$ ＿＿＿＿＿＿。

答案：$1+p+q$

解析：∵ $\sin\theta$，$\cos\theta$ 爲$x^2+px+q=0$ 之二根　∴ $\sin\theta+\cos\theta=-p$，$\sin\theta\cos\theta=q$

$2\sin^2\dfrac{\theta}{2}(\cos\dfrac{\theta}{2}-\sin\dfrac{\theta}{2})^2=2\cdot\dfrac{1-\cos\theta}{2}\cdot(1-2\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2})$

$=(1-\cos\theta)(1-\sin\theta)$

$=1-(\sin\theta+\cos\theta)+\sin\theta\cos\theta=1+p+q$