| 高雄市明誠中學 高一數學平時測驗 | | | | | 日期：93.06.14 |
|---|---|---|---|---|---|
| 範圍 | 3-4 積與和差互化(2) | 班級 | | 姓名 | |
| | | 座號 | | | |

一、填充題(每題 10 分)

1. $\sin80° - \sin40° - \sin20° =$ ＿＿＿＿＿＿。

答案：0

解析：

$$\sin80° - \sin40° - \sin20° = (\sin80° - \sin40°) - \sin20° = 2\cos\frac{80°+40°}{2}\sin\frac{80°-40°}{2} - \sin20°$$

$$= 2\cos60°\sin20° - \sin20° = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\sin20° - \sin20° = \sin20° - \sin20° = 0$$

2. 設$\alpha$，$\beta$ 不同界，已知$\alpha$，$\beta$ 爲方程式$\sin x - \sqrt{3}\cos x = 1$ 的兩個根，則$\tan\frac{\alpha+\beta}{2}$之值爲＿。

答案：$-\frac{\sqrt{3}}{3}$

解析：

$\alpha$，$\beta$ 爲 $\sin x - \sqrt{3}\cos x = 1$ 的兩個根，代入

$\therefore\quad \sin\alpha - \sqrt{3}\cos\alpha = 1$

$-)\quad \sin\beta - \sqrt{3}\cos\beta = 1$

$(\sin\alpha - \sin\beta) - \sqrt{3}(\cos\alpha - \cos\beta) = 0$

$\sin\alpha - \sin\beta = \sqrt{3}(\cos\alpha - \cos\beta)$

$$2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} = \sqrt{3}\left(-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

因爲$\alpha$，$\beta$ 不同界 $\therefore\quad \alpha - \beta \neq 2k\pi$，$k\in Z \Rightarrow \frac{\alpha-\beta}{2} \neq k\pi$，$k\in Z \quad\Rightarrow\quad \sin\frac{\alpha-\beta}{2} \neq 0$

由(1)(2)得 $\cos\frac{\alpha+\beta}{2} = -\sqrt{3}\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \quad\Rightarrow \frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \tan\frac{\alpha+\beta}{2} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

3. $4\sin20° + \tan20° =$ ＿＿＿＿＿＿。

答案：$\sqrt{3}$

解析：

$$4\sin20° + \tan20° = 4\sin20° + \frac{\sin20°}{\cos20°} = \frac{4\sin20°\cos20° + \sin20°}{\cos20°} = \frac{2\sin40° + \sin20°}{\cos20°}$$

$$= \frac{\sin40° + (\sin40° + \sin20°)}{\cos20°} = \frac{\sin40° + 2\sin30°\cos10°}{\cos20°}$$

$$= \frac{\sin40° + \cos10°}{\cos20°} = \frac{\cos50° + \cos10°}{\cos20°} = \frac{2\cos30°\cos20°}{\cos20°} = 2\cos30° = \sqrt{3}$$

4. $\cos\frac{\pi}{11} + \cos\frac{3\pi}{11} + \cos\frac{5\pi}{11} + \cos\frac{7\pi}{11} + \cos\frac{9\pi}{11} =$ ＿＿＿＿＿＿。

答案：$\frac{1}{2}$

解析：

令 $k=\cos\frac{\pi}{11}+\cos\frac{3\pi}{11}+\cos\frac{5\pi}{11}+\cos\frac{7\pi}{11}+\cos\frac{9\pi}{11}$　　同乘 $\sin\frac{\pi}{11}$

$\therefore\quad 2k\sin\frac{\pi}{11}$

$=2\cos\frac{\pi}{11}\sin\frac{\pi}{11}+2\cos\frac{3\pi}{11}\sin\frac{\pi}{11}+2\cos\frac{5\pi}{11}\sin\frac{\pi}{11}+2\cos\frac{7\pi}{11}\sin\frac{\pi}{11}+2\cos\frac{9\pi}{11}\sin\frac{\pi}{11}$

$=\sin\frac{2\pi}{11}+(\sin\frac{4\pi}{11}-\sin\frac{2\pi}{11})+(\sin\frac{6\pi}{11}-\sin\frac{4\pi}{11})+(\sin\frac{8\pi}{11}-\sin\frac{6\pi}{11})+(\sin\frac{10\pi}{11}-\sin\frac{8\pi}{11})$

$=\sin\frac{10\pi}{11}=\sin\frac{\pi}{11}$ ，故 $k=\dfrac{\sin\frac{\pi}{11}}{2\sin\frac{\pi}{11}}=\frac{1}{2}$

5. 求下列各值：

(1) $\sin 52.5°\cos 7.5°=$ __________ 。　(2) $\sin 52.5°\sin 7.5°=$ __________ 。

(3) $\sin 65°-\sin 55°-\sin 5°=$ __________ 。　(4) $\cos 10°+\cos 110°+\cos 130°=$ __________ 。

答案：(1) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{4}$　(2) $\frac{\sqrt{2}-1}{4}$　(3) 0　(4) 0

解析：

(1) $\sin 52.5°\cdot\cos 7.5°=\frac{1}{2}[\sin(52.5°+7.5°)+\sin(52.5°-7.5°)]$

$=\frac{1}{2}(\sin 60°+\sin 45°)=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{4}$

(2) $\sin 52.5°\sin 7.5°=\frac{1}{2}[\cos(52.5°-7.5°)-\cos(52.5°+7.5°)]$

$=\frac{1}{2}(\cos 45°-\cos 60°)=\frac{\sqrt{2}-1}{4}$

(3) $\sin 65°-\sin 55°-\sin 5°=2\cos 60°\sin 5°-\sin 5°=\sin 5°-\sin 5°=0$

(4) $\cos 10°+\cos 110°+\cos 130°=2\cos 60°\cos(-50°)+\cos 130°=\cos 50°-\cos 50°=0$

6. $\dfrac{\sin 5°+\sin 20°+\sin 40°+\sin 55°}{\cos 5°+\cos 20°+\cos 40°+\cos 55°}=$ __________ 。

答案：$\frac{\sqrt{3}}{3}$

解析：$\dfrac{\sin 5°+\sin 20°+\sin 40°+\sin 55°}{\cos 5°+\cos 20°+\cos 40°+\cos 55°}=\dfrac{(\sin 5°+\sin 55°)+(\sin 20°+\sin 40°)}{(\cos 5°+\cos 55°)+(\cos 20°+\cos 40°)}$

$=\dfrac{2\sin 30°\cos 25°+2\sin 30°\cos 10°}{2\cos 30°\cos 25°+2\cos 30°\cos 10°}=\dfrac{2\cdot\frac{1}{2}\cos 25°+2\cdot\frac{1}{2}\cos 10°}{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 25°+2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 10°}$

$=\dfrac{\cos 25°+\cos 10°}{\sqrt{3}(\cos 25°+\cos 10°)}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

7. $\cos 100°\sin 50°+\sin 50°\cos 20°-\cos 20°\cos 100°=$ __________ 。

答案：$\dfrac{3}{4}$

解析：

$\cos100°\sin50° + \sin50°\cos20° - \cos20°\cos100° = \sin50°(\cos100° + \cos20°) - \cos20°\cos100°$

$= \sin50° \cdot (2\cos60°\cos40°) - \dfrac{1}{2}(2\cos100°\cos20°)$

$= \dfrac{1}{2}(2\sin50°\cos40°) - \dfrac{1}{2}(\cos120° + \cos80°)$

$= \dfrac{1}{2}(\sin90° + \sin10°) - \dfrac{1}{2}(\cos120° + \cos80°)$

$= \dfrac{1}{2}(1 + \sin10°) - \dfrac{1}{2}(-\dfrac{1}{2} + \sin10°) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}$

8. 設 $180° < x < 360°$，若$\tan x = \dfrac{\cos 83° + \sin 37°}{\sin 83° - \cos 37°}$，則$x =$ ＿＿＿＿＿＿ 。

答案：255°

解析：$\tan x = \dfrac{\cos 83° + \sin 37°}{\sin 83° - \cos 37°} = \dfrac{\sin 7° + \sin 37°}{\cos 7° - \cos 37°} = \dfrac{2\sin 22°\cos15°}{2\sin 22°\sin15°} = \cot15° = \tan75°$

$x$ 爲第一、第三象限之 75° ⇒ 又　$180° < x < 360°$　∴　$x = 180° + 75° = 255°$

9. 求$\cos^2 70° + \sin^2 40° + \cos70°\sin40°$之值 ＝ ＿＿＿＿＿＿ 。

答案：$\dfrac{3}{4}$

解析：$\cos^2 70° + \sin^2 40° + \cos70°\sin40° = \dfrac{1+\cos140°}{2} + \dfrac{1-\cos80°}{2} + \dfrac{1}{2}(\sin110° - \sin30°)$

$= 1 + \dfrac{1}{2}(\cos140° - \cos80°) + \dfrac{1}{2}\sin110° - \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2}$

$= 1 + \dfrac{1}{2} \cdot (-2\sin110°\sin30°) + \dfrac{1}{2}\sin110° - \dfrac{1}{4}$

$= \dfrac{3}{4} - \dfrac{1}{2}\sin110° + \dfrac{1}{2}\sin110° = \dfrac{3}{4}$

10.設$\begin{cases} \cos\alpha - \cos\beta = \dfrac{1}{2} \\ \sin\alpha + \sin\beta = \dfrac{-1}{3} \end{cases}$，求(1) $\tan\dfrac{\alpha-\beta}{2} =$ ＿＿＿＿＿＿ 。　(2) $\sin(\alpha-\beta) =$ ＿＿＿＿＿＿ 。

答案：(1)$\dfrac{3}{2}$　(2)$\dfrac{12}{13}$

解析：(1)$\begin{cases} \cos\alpha - \cos\beta = \dfrac{1}{2} \\ \sin\alpha + \sin\beta = -\dfrac{1}{3} \end{cases}$ ⇒ $\begin{cases} -2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2} = \dfrac{1}{2} \\ 2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2} = -\dfrac{1}{3} \end{cases}$ ⇒ $\tan\dfrac{\alpha-\beta}{2} = \dfrac{3}{2}$

$$(2)\ \sin(\alpha-\beta) = \frac{2\tan\dfrac{\alpha-\beta}{2}}{1+\tan^2\dfrac{\alpha-\beta}{2}} = \frac{2\cdot\dfrac{3}{2}}{1+\dfrac{9}{4}} = \frac{12}{13}$$

11.設 $\sin\alpha + \sin\beta = 1$，$\cos\alpha + \cos\beta = 0$，求 $\cos(\alpha-\beta)$及 $\cos(\alpha+\beta)$之值。

答案：$\cos(\alpha-\beta)=-\dfrac{1}{2}$，$\cos(\alpha+\beta)=-1$

解析：

$\sin\alpha+\sin\beta=1\cdots\cdots$①，$\cos\alpha+\cos\beta=0\cdots\cdots$②

①$^2$ + ②$^2$ $\Rightarrow$ $\sin^2\alpha+2\sin\alpha\sin\beta+\sin^2\beta+\cos^2\alpha+2\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta=1$

$\Rightarrow\ 2+2\cos(\alpha-\beta)=1\ \Rightarrow\ \cos(\alpha-\beta)=-\dfrac{1}{2}$

由①$2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}=1\cdots\cdots$③，由②$2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}=0\cdots\cdots$④

由③$\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}\neq 0$，由④$\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}=0$，$\cos(\alpha+\beta)=2\cos^2\dfrac{\alpha+\beta}{2}-1=-1$

12.計算$\dfrac{\sin 7^\circ+\sin 8^\circ\cos 15^\circ}{\cos 7^\circ-\sin 8^\circ\sin 15^\circ}$之值。

答案：$2-\sqrt{3}$

解析：$\dfrac{\sin 7^\circ+\sin 8^\circ\cos 15^\circ}{\cos 7^\circ-\sin 8^\circ\sin 15^\circ}=\dfrac{\sin 7^\circ+\frac{1}{2}(\sin 23^\circ-\sin 7^\circ)}{\cos 7^\circ+\frac{1}{2}(\cos 23^\circ-\cos 7^\circ)}$

$=\dfrac{\sin 23^\circ+\sin 7^\circ}{\cos 23^\circ+\cos 7^\circ}=\dfrac{2\sin 15^\circ\ \cos 8^\circ}{2\cos 15^\circ\cos 8^\circ}=\tan 15^\circ=2-\sqrt{3}$