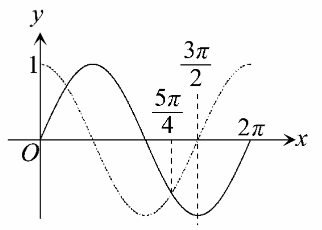
高雄市明誠中學 高一數學平時測驗 日期：93.06.03					
範圍	3-2,3 和角倍角半角公式+ANS	班級		姓名	
		座號			

一. 選擇題(每題 10 分)

1. 設$\frac{5\pi}{4}<\theta<\frac{3\pi}{2}$，則$\sqrt{1+\sin 2\theta}-\sqrt{1-\sin 2\theta}$ =



(A) $2\sin\theta$ (B) $2\cos\theta$ (C) $2\sin2\theta$ (D) $-2\sin\theta$ (E) $-2\cos\theta$

答案：(E)

解析：

(1)∵ $\sqrt{1+\sin 2\theta}-\sqrt{1-\sin 2\theta}$

$=\sqrt{\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta}-\sqrt{\sin^2\theta+\cos^2\theta-2\sin\theta\cos\theta}$

$=\sqrt{(\sin\theta+\cos\theta)^2}-\sqrt{(\sin\theta-\cos\theta)^2}=|\sin\theta+\cos\theta|-|\sin\theta-\cos\theta|$

(2)由右上 $y=\sin x$，$y=\cos x$ 的圖形，知$\frac{5\pi}{4}<\theta<\frac{3\pi}{2}$時，$0>\cos\theta>\sin\theta$

∴ $\sin\theta+\cos\theta<0$，$\sin\theta-\cos\theta<0$

(3)∴ 原式 $=-(\sin\theta+\cos\theta)+(\sin\theta-\cos\theta)=-2\cos\theta$

2. 設 $\cos\theta=-\frac{4}{5}$，且$\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$，則 $\cos\frac{\theta}{2}=$ (A) $-\frac{2}{5}$ (B) $\frac{3}{\sqrt{10}}$ (C) $\frac{1}{\sqrt{10}}$ (D) $-\frac{3}{\sqrt{10}}$ (E) $-\frac{1}{\sqrt{10}}$

答案：(E)

解析：$\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$，$\frac{\pi}{2}<\frac{\theta}{2}<\frac{3}{4}\pi$，$\cos\frac{\theta}{2}<0$， $\cos\frac{\theta}{2}= =-\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}=-\sqrt{\frac{1+(-\frac{4}{5})}{2}}=-\frac{1}{\sqrt{10}}$

二、填充題(每題 10 分)

3. 設$\sin\theta-\cos\theta=\frac{1}{3}$，則

(1) $\sin3\theta+\cos3\theta=$ __________。 (2) $\cos^4\theta+\sin^4\theta=$ __________。

答案：(1) $-\frac{25}{27}$ (2) $\frac{49}{81}$

解析：

(1)由$\sin\theta-\cos\theta=\frac{1}{3}$ ⇒ $\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{9}$ ⇒ $\sin\theta\cos\theta=\frac{4}{9}$

故$\sin3\theta+\cos3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta+4\cos^3\theta-3\cos\theta=3(\sin\theta-\cos\theta)-4(\sin^3\theta-\cos^3\theta)$

$=3(\sin\theta-\cos\theta)-4(\sin\theta-\cos\theta)(\sin^2\theta+\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)=3\cdot\frac{1}{3}-4\cdot\frac{1}{3}\cdot(1+\frac{4}{9})=-\frac{25}{27}$

(2) $\sin^4\theta+\cos^4\theta=(\sin^2\theta+\cos^2\theta)^2-2\sin^2\theta\cos^2\theta=1-2(\frac{4}{9})^2=\frac{49}{81}$

4. 以$x-\cos40°$除$f(x)=3x-4x^3$之餘式爲__________。

答案：$\frac{1}{2}$

解析：由餘式定理以$x-\cos40°$除$f(x)=3x-4x^3$的餘式爲$f(\cos40°)$

$f(\cos40°)=3\cos40°-4\cos^3 40°=-(4\cos^3 40°-3\cos40°)$

$= -\cos(3\times 40°) = -\cos 120° = -(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$

5. 設 $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ ，$\tan\theta = -\frac{4}{3}$ ，則

(1) $\tan 2\theta =$ ＿＿＿＿＿＿。 (2) $\sin 2\theta =$＿＿＿＿＿＿。(3)$\tan\frac{\theta}{2} =$ ＿＿＿＿＿＿。

(4)$\sin\frac{\theta}{2} =$＿＿＿＿＿＿， (5)$\sin 3\theta =$＿＿＿＿＿＿。

答案：(1) $\frac{24}{7}$ (2) $\frac{-24}{25}$ (3)2 (4) $\frac{2}{\sqrt{5}}$ (5) $\frac{44}{125}$

解析：

(1) $\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = \frac{2(-\frac{4}{3})}{1-(-\frac{4}{3})^2} = \frac{24}{7}$ (2) $\sin 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta} = \frac{2\cdot(\frac{-4}{3})}{1+(\frac{-4}{3})^2} = \frac{-24}{25}$

(3)$\because$ $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$且 $\tan\theta = -\frac{4}{3}$ ，$\sin\theta = \frac{4}{5}$ ，$\cos\theta = -\frac{3}{5}$ ，$\tan\frac{\theta}{2} = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} = \frac{\frac{4}{5}}{1-\frac{3}{5}} = 2$

(4) $\because \frac{\pi}{4} < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin\frac{\theta}{2} = +\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1-(-\frac{3}{5})}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$

(5) $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta = 3(\frac{4}{5}) - 4(\frac{4}{5})^3 = \frac{44}{125}$

6. 設$\cos 2\theta = \frac{3}{5}$ ，$\sin 2\theta < 0$，則$\tan\theta + \cot\theta =$ ＿＿＿＿＿＿。

答案：$-\frac{5}{2}$

解析：$\because$ $\cos 2\theta = \frac{3}{5}$ 且 $\sin 2\theta < 0$ $\therefore$ $\sin 2\theta = -\frac{4}{5}$

$\tan\theta + \cot\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\cos\theta\sin\theta} = \frac{1}{\sin\theta\cos\theta} = \frac{2}{2\sin\theta\cos\theta} = \frac{2}{\sin 2\theta} = \frac{2}{-\frac{4}{5}} = -\frac{5}{2}$

7. $\sin 67.5°$之值 $=$ ＿＿＿＿＿＿。

答案：$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

解析：$\sin 67.5° = \sin\frac{135°}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos 135°}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

8. 求下列各值：

(1) $\cos^2\frac{\pi}{8} + \cos^2\frac{3\pi}{8} + \cos^2\frac{5\pi}{8} + \cos^2\frac{7\pi}{8} =$ ＿＿＿＿＿＿。

(2) $\cos 20°\cos 40°\cos 80° =$ ＿＿＿＿＿＿。

答案：(1) 2　(2) $\frac{1}{8}$

解析：

(1)原式 $=\cos^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{3\pi}{8}+\cos^2\frac{3\pi}{8}+\cos^2\frac{\pi}{8}$

$$=2(\cos^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{3\pi}{8})=2(\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}+\frac{1+\cos\frac{3\pi}{4}}{2})=2(\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}+\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2})\ =2$$

(2) $\cos 20°\cos 40°\cos 80°=\frac{2\sin 20°\cos 20°\cos 40°\cos 80°}{2\sin 20°}$

$$=\frac{\sin 40°\cos 40°\cos 80°}{2\sin 20°}=\frac{\frac{1}{2}\sin 80°\cos 80°}{2\sin 20°}=\frac{\frac{1}{2}\sin 160°}{4\sin 20°}=\frac{\sin 20°}{8\sin 20°}=\frac{1}{8}$$

9. $5\sin\theta+12\cos\theta=0$，$\frac{3\pi}{2}<\theta<2\pi$，求(1) $\tan 2\theta=$ ＿＿＿＿＿＿ 。　(2) $\cos\frac{\theta}{2}=$ ＿＿＿＿＿＿ 。

答案：(1) $\frac{120}{119}$　(2) $\frac{-3}{\sqrt{13}}$

解析：

(1) $5\sin\theta+12\cos\theta=0 \quad\Rightarrow\quad 5\sin\theta=-12\cos\theta$，$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\tan\theta=-\frac{12}{5}$

$$\tan 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\frac{\frac{-24}{5}}{1-\frac{144}{25}}=\frac{24}{5}\times\frac{25}{119}=\frac{120}{119}$$

(2)$\because\ \frac{3}{2}\pi<\theta<2\pi \quad\therefore\quad \cos\theta>0 \quad\Rightarrow\quad \cos\theta=\frac{5}{13}$，

又 $\frac{3\pi}{4}<\frac{\theta}{2}<\pi$，$\cos\frac{\theta}{2}<0\Rightarrow\cos\frac{\theta}{2}=-\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}=-\sqrt{\frac{1+\frac{5}{13}}{2}}=-\frac{3}{\sqrt{13}}$，　$\cos\frac{\theta}{2}=\frac{-3}{\sqrt{13}}$

10.函數 $f(x)=\cos^2 2x+2\sin^2 x$，$x\in R$。

(1) $f(x)$的最小值爲＿＿＿＿＿＿ 。　(2) $f(x)$的最大值爲＿＿＿＿＿＿ 。

答案：(1) $\frac{3}{4}$　(2) 3

解析：

$f(x)=\cos^2 2x+2\sin^2 x=(1-2\sin^2 x)^2+2\sin^2 x=4\sin^4 x-2\sin^2 x+1=4(\sin^2 x-\frac{1}{4})^2+\frac{3}{4}$

$\because\ -1\le\sin x\le 1 \quad\therefore\quad 0\le\sin^2 x\le 1$

故(1) $\sin^2 x=\frac{1}{4}$ 時，$f(x)=\frac{3}{4}$ 爲最小値　(2) $\sin^2 x=1$ 時，$f(x)=3$ 爲最大値

11.設$\sin\theta$，$\cos\theta$爲方程式$x^2+px+q=0$ 的二根，試以p，q表 $2\cos^2\frac{\theta}{2}(\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2})^2$。＿＿＿

答案：$1-p+q$

解析：

$\because\ \sin\theta$，$\cos\theta$ 爲$x^2+px+q=0$ 的二根　$\therefore\ \sin\theta+\cos\theta=-p$，$\sin\theta\cdot\cos\theta=q$

故 $2\cos^2\frac{\theta}{2}(\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2})^2=(1+\cos\theta)(\cos^2\frac{\theta}{2}+2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}+\sin^2\frac{\theta}{2})$

$=(1+\cos\theta)(1+\sin\theta)=1+(\sin\theta+\cos\theta)+\sin\theta\cos\theta=1+(-p)+q=1-p+q$

12.設 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}<\beta<\pi$，且 $\sin\alpha=\frac{13}{14}$，$\sin\beta=\frac{11}{14}$，則 $\alpha-\beta=$ __________。

答案： $-\frac{\pi}{3}$

解析：∵ $0<\alpha<\frac{\pi}{2}<\beta<\pi$ 且 $\sin\alpha=\frac{13}{14}$，$\sin\beta=\frac{11}{14}$，畫圖 $\cos\alpha=\frac{3\sqrt{3}}{14}$，$\cos\beta=-\frac{5\sqrt{3}}{14}$

故 $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\frac{3\sqrt{3}}{14}(-\frac{5\sqrt{3}}{14})+\frac{13}{14}\cdot\frac{11}{14}=\frac{98}{196}=\frac{1}{2}$

∵ $-\pi<-\beta<-\frac{\pi}{2}$ 且 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ ∴ $-\pi<\alpha-\beta<0$，故 $\alpha-\beta=-\frac{\pi}{3}$

13.求 $\tan80°-\tan20°-\sqrt{3}\tan80°\tan20°$ 的値爲__________。

答案： $\sqrt{3}$

解析：$\tan(80°-20°)=\frac{\tan80°-\tan20°}{1+\tan80°\tan20°}=\tan60°=\sqrt{3}$

$\Rightarrow\ \tan80°-\tan20°=\sqrt{3}+\sqrt{3}\tan80°\tan20°$

$\therefore\ \tan80°-\tan20°-\sqrt{3}\tan80°\tan20°=\sqrt{3}$

14.$\cos^2\frac{\pi}{24}-\cos^2\frac{5\pi}{24}=$ __________。

答案：$\frac{\sqrt{2}}{4}$

解析：$\cos^2\frac{\pi}{24}-\cos^2\frac{5\pi}{24}=\sin(\frac{5\pi}{24}+\frac{\pi}{24})\sin(\frac{5\pi}{24}-\frac{\pi}{24})=\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}$

15. $\cos40°\sin160°-\sin220°\cos340°=$ __________。

答案：$\frac{\sqrt{3}}{2}$

解析：利用和角公式

$\cos40°\sin160°-\sin220°\cos340°=\cos40°\sin20°+\sin40°\cos20°$

$=\sin20°\cos40°+\cos20°\sin40°=\sin(20°+40°)=\sin60°=\frac{\sqrt{3}}{2}$

16.$P(\cos\alpha，\sin\alpha)$，$Q(\cos\beta，\sin\beta)$，$\alpha-\beta=\frac{1}{4}\pi$，求 P 到 Q 之距離 $=$ __________。

答案：$\sqrt{2-\sqrt{2}}$

解析：$\overline{PQ}=\sqrt{(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2}$

$=\sqrt{\cos^2\alpha-2\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta+\sin^2\alpha-2\sin\alpha\sin\beta+\sin^2\beta}$

$=\sqrt{2-2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)}=\sqrt{2-2\cos(\alpha-\beta)}=\sqrt{2-2\cos\frac{\pi}{4}}==\sqrt{2-\sqrt{2}}$

17.設 $\tan\alpha$，$\tan\beta$ 爲 $x^2+6x-1=0$ 之二根，則

(1) $\tan(\alpha+\beta)=$ ＿＿＿＿＿＿。

(2) $\sin^2(\alpha+\beta)+2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)+5\cos^2(\alpha+\beta)$之值爲＿＿＿＿＿＿。

答案：(1) -3　　(2) $\frac{4}{5}$

解析：(1)由根與係數關係得$\tan\alpha+\tan\beta=-6$，$\tan\alpha\tan\beta=-1$

$$\Rightarrow\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{-6}{1+1}=-3$$

$$\therefore\quad\cos^2(\alpha+\beta)=\frac{1}{\sec^2(\alpha+\beta)}=\frac{1}{1+\tan^2(\alpha+\beta)}=\frac{1}{1+(-3)^2}=\frac{1}{10}$$

(2)原式$=\cos^2(\alpha+\beta)\left[\frac{\sin^2(\alpha+\beta)}{\cos^2(\alpha+\beta)}+\frac{2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)}{\cos^2(\alpha+\beta)}+\frac{5\cos^2(\alpha+\beta)}{\cos^2(\alpha+\beta)}\right]$

$$=\cos^2(\alpha+\beta)[\tan^2(\alpha+\beta)+2\tan(\alpha+\beta)+5=\frac{1}{10}[(-3)^2+2\cdot(-3)+5]=\frac{4}{5}$$

18.設$\alpha+\beta=\frac{\pi}{3}$，則$(\sin\alpha+\sin\beta)(\sin\alpha-\sin\beta)$之最小值爲＿＿＿＿＿＿。

答案：$-\frac{\sqrt{3}}{2}$

解析：$(\sin\alpha+\sin\beta)(\sin\alpha-\sin\beta)=\sin^2\alpha-\sin^2\beta$

$$=\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)=\sin\frac{\pi}{3}\sin(\alpha-\beta)=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(\alpha-\beta)$$

又 $-1\le\sin(\alpha-\beta)\le1\Rightarrow$ 原式$=-\frac{\sqrt{3}}{2}$最小

19.求$(1+\tan1°)(1+\tan2°)(1+\tan3°)(1+\tan4°)\cdots(1+\tan44°)$之值。＿＿＿＿＿＿

答案：2^{22}

解析：

※當 $\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}\Rightarrow(1+\tan\alpha)(1+\tan\beta)=2$　　(公式)

原式 $=[(1+\tan1°)(1+\tan44°)][(1+\tan2°)(1+\tan43°)]\cdots[(1+\tan22°)(1+\tan23°)]$

$$=\overbrace{2\cdot2\cdot\cdots\cdot2}^{22個}=2^{22}$$

20.在扇形 OAB 中，O 爲圓心，$\overline{OA}=\overline{OB}=r$ 爲半徑，$\angle AOB=60°$。若 P 爲圓弧 $\overset{\frown}{AB}$ 上一點，而 P 至$\overline{OA}$的距離爲 3，P 至$\overline{OB}$的距離爲 2，試求 $r=$ ＿＿＿＿＿＿。

答案：$r=\frac{2\sqrt{57}}{3}$

解析：$r=\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{a^2+ab+b^2}=\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{3^2+3\cdot2+2^2}=\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{19}=\frac{2\sqrt{57}}{3}$