高雄市明誠中學 高一數學平時測驗					日期：93.05.20
範圍	3-1 三角函數圖形 +Ans	班級		姓名	
		座號			

一. 選擇題(每題 10 分)

1. 點 $P(\cos100，\sin100)$在：

(A)第一象限 (B)第二象限 (C)第三象限 (D)第四象限 (E)坐標軸 上

答案：(D)

解析：100 弳 $\fallingdotseq 100\times 57°17'45'' = 5700°1700'4500''$

$= 5700°1775' = 5729°35' = 360°\times 15 + 329°35'$

$\therefore$ 100 弳在第四象限 $\Rightarrow$ $\cos100 > 0，\sin100 < 0$ $\therefore$ $P(\cos100，\sin100)$在第四象限

2. 設 $a = \cos1$，$b = \sin2$，$c = \tan3$，$d = \csc4$，$e = \sec5$，其中最大的數爲

(A) a (B) b (C) c (D) d (E) e

答案：(E)

解析：

$a = \cos1 = \cos57.3° < 1$

$b = \sin2 = \sin114.6° = \cos24.6° < 1$

$c = \tan3 = \tan171.9° = -\tan8.1° < 0$

$d = \csc4 = \csc229.2° = -\csc49.2° < 0$

$e = \sec5 = \sec286.5° = \csc16.5° > 1$，$\therefore$ 最大爲 e

3. 下列哪一個正切函數值最大？

(A) $\tan(-\frac{26\pi}{11})$ (B) $\tan(-\frac{7\pi}{11})$ (C) $\tan\frac{3\pi}{11}$ (D) $\tan\frac{13\pi}{11}$ (E) $\tan\frac{23\pi}{11}$

答案：(B)

解析：

$\tan(-\frac{26\pi}{11}) = -\tan(\frac{26\pi}{11}) = -\tan(2\pi + \frac{4\pi}{11}) = -\tan(\frac{4\pi}{11}) < 0$，

$\tan(-\frac{7\pi}{11}) = -\tan(\frac{7\pi}{11}) = -\tan(\pi - \frac{4\pi}{11}) = \tan\frac{4\pi}{11}$ ，

$\tan\frac{13\pi}{11} = \tan(\pi + \frac{2\pi}{11}) = \tan\frac{2\pi}{11}$ ，

$\tan\frac{23\pi}{11} = \tan(2\pi + \frac{\pi}{11}) = \tan\frac{\pi}{11}$

$0 < x < \frac{\pi}{2}$時，$\tan x$ 爲遞增函數， $\frac{\pi}{11} < \frac{2\pi}{11} < \frac{3\pi}{11} < \frac{4\pi}{11}$

$\therefore$ $-\tan(\frac{4\pi}{11}) < \tan\frac{\pi}{11} < \tan\frac{2\pi}{11} < \tan\frac{3\pi}{11} < \tan\frac{4\pi}{11}$

即 $\tan(-\frac{26\pi}{11}) < \tan\frac{23\pi}{11} < \tan\frac{13\pi}{11} < \tan\frac{3\pi}{11} < \tan(-\frac{7\pi}{11})$，故 $\tan(-\frac{7\pi}{11})$最大

4. 下列何者週期爲 π？(複選)

(A) $y = 3\sin x + 5$ (B) $y = -2\cos(2x - 1)$ (C) $y = \pi\tan(x + 5)$ (D) $y = \csc(-2x - 1)$

(E) $y = 4 - \cot2x$

答案：(B)(C)(D)

解析：

(A) $y=3\sin x+5$，週期 $=2\pi$ (B) $y=-2\cos(2x-1)$，週期 $=\dfrac{2\pi}{2}=\pi$

(C) $y=\pi\tan(x+5)$，週期 $=\pi$ (D) $y=\csc(-2x-1)$，週期 $=\dfrac{2\pi}{|-2|}=\pi$

(E) $y=4-\cot 2x$，週期 $=\dfrac{\pi}{2}$

5. 下列各函數的圖形，何者有漸近線？(複選)

(A) $y=\sin x$ (B) $y=\tan x$ (C) $y=\cot x$ (D) $y=\sec x$ (E) $y=\csc x$

答案：(B)(C)(D)(E)

解析：

$y=\tan x$，$y=\cot x$，$y=\sec x$，$y=\csc x$ 等圖形都有漸近線而 $y=\sin x$，$y=\cos x$ 沒有漸近線

二、填充題(每題 10 分)

6. 設 $f(x)=\ell\cos kx$，ℓ，k 為常數，若 $f(0)=-2$，$f(\dfrac{\pi}{3})=\sqrt{3}$，則 $f(\dfrac{\pi}{2})$ 之值為__________。

答案：$\pm\sqrt{2}$

解析：

$f(0)=\ell\cos 0=\ell=-2$

$f(\dfrac{\pi}{3})=\ell\cos k(\dfrac{\pi}{3})=\sqrt{3} \Rightarrow \cos\dfrac{k\pi}{3}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

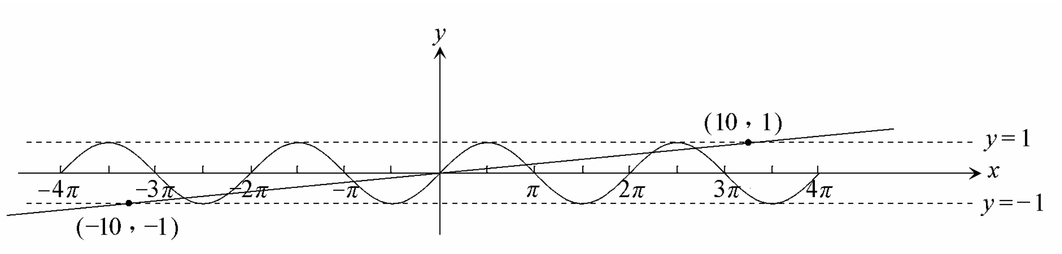
$\Rightarrow \dfrac{k\pi}{3}=2n\pi\pm\dfrac{5\pi}{6}$，$n\in Z \Rightarrow k=6n\pm\dfrac{5}{2}$，$n\in Z$

$f(\dfrac{\pi}{2})=-2\cos k(\dfrac{\pi}{2})=-2\cos(6n\pm\dfrac{5}{2})(\dfrac{\pi}{2})=-2\cos(3n\pi\pm\dfrac{5\pi}{4})=-2\cos(n\pi\pm\dfrac{5\pi}{4})=\pm\sqrt{2}$

7. 方程式 $10\sin x=x$ 共有__________個實根。

答案：7 個

解析：



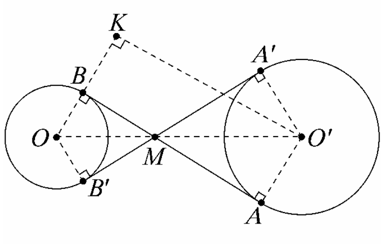
$10\sin x=x \Rightarrow \sin x=\dfrac{x}{10} \Rightarrow \begin{cases} y=\sin x \\ y=\dfrac{x}{10} \end{cases}$ 的實根數，就是 $y=\sin x$ 圖形與 $y=\dfrac{x}{10}$ 圖形之交點數，其圖形如上：

當 $y=\dfrac{x}{10}$，$x=10 \Rightarrow y=1;\ x=-10 \Rightarrow y=-1$

又 $3\pi<10$ 且 $4\pi>10$，故 $y=\sin x$ 與 $y=\dfrac{x}{10}$ 交點有 7 個，即 $10\sin x=x$ 有 7 個實根

8. 二圓輪之半徑分別爲 2、3，中心距離爲 10，以皮帶交叉緊繞二圓輪，則皮帶長爲_____。

答案：$10\sqrt{3}+\dfrac{20}{3}\pi$



解析：

內公切線段長 $\overline{AB}=\overline{O'K}=\sqrt{\overline{OO'}^2-\overline{OK}^2}=\sqrt{10^2-5^2}=5\sqrt{3}$

$\angle BOM=\angle AO'M=\dfrac{\pi}{3}$

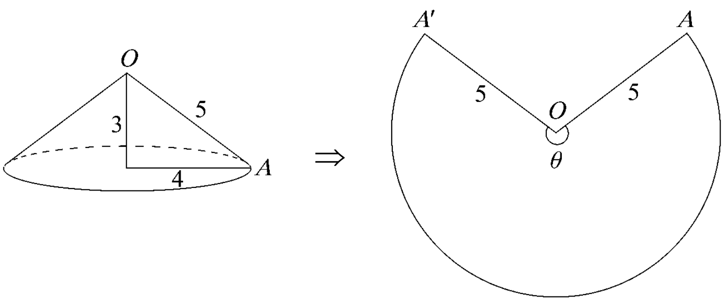
$\therefore$ 優弧角$\angle BOB'=\dfrac{4\pi}{3}$，且優弧角$\angle AO'A'=\dfrac{4\pi}{3}$

皮帶長 $=2\times 5\sqrt{3}+2\cdot\dfrac{4\pi}{3}+3\cdot\dfrac{4\pi}{3}=10\sqrt{3}+\dfrac{20}{3}\pi$

9.有一直圓錐，底半徑爲 4，高爲 3，現沿其斜高剪成一扇形，則此扇形中心角爲____弧度。

答案：$\dfrac{8\pi}{5}$

解析：



底圓周長 $2\pi\cdot 4=8\pi$，$\overset{\frown}{AA'}=5\theta=8\pi$ $\therefore$ $\theta=\dfrac{8\pi}{5}$

10.求$y=\dfrac{1}{4}\sin(\dfrac{x}{3}+\dfrac{\pi}{2})$之(1)週期__________。 (2)最大值__________。

答案：(1) 6π (2) $\dfrac{1}{4}$

解析： (1)週期 $=\dfrac{2\pi}{1/3}=6\pi$

(2) $-1\le\sin(\dfrac{x}{3}+\dfrac{\pi}{2})\le 1$ $\Rightarrow -\dfrac{1}{4}\le\dfrac{1}{4}\sin(\dfrac{x}{3}+\dfrac{\pi}{2})\le\dfrac{1}{4}$，故 $y=\dfrac{1}{4}\sin(\dfrac{x}{3}+\dfrac{\pi}{2})$之 $\text{Max}=\dfrac{1}{4}$

11. $\dfrac{\sin(-\theta)}{\sin(\pi+\theta)}-\dfrac{\tan(\frac{3\pi}{2}+\theta)}{\cot(\pi+\theta)}-\dfrac{\cos(-\theta)}{\sin(\frac{\pi}{2}+\theta)}=$__________。

答案：1

解析：

原式 $=\dfrac{-\sin\theta}{-\sin\theta}-\dfrac{-\cot\theta}{\cot\theta}-\dfrac{\cos\theta}{\cos\theta}=1+1-1=1$

12.(1) $\dfrac{13\pi}{12}=$__________度。(2).$216°=$ __________弧度

答案：(1)195°　(2) $\dfrac{6}{5}\pi$

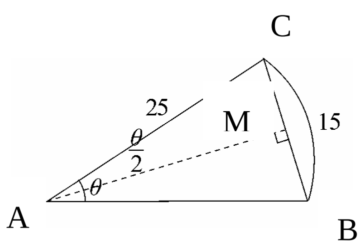
解析：(1)$\because$　1（弧度）$=\dfrac{180°}{\pi}$　$\therefore$　$\dfrac{13\pi}{12}=\dfrac{13\pi}{12}\times(\dfrac{180}{\pi})°=195°$

(2)$\because$　$1°=\dfrac{\pi}{180}$（弧度）　$\therefore$　$216°=216\times\dfrac{\pi}{180}=\dfrac{6}{5}\pi$

13.已知一扇形的半徑爲 25 公分，弧長爲 15 公分，則該弧所對之弦的長度爲________公分。（註：$\sin 0.3=0.296$）

答案：14.8

解析：

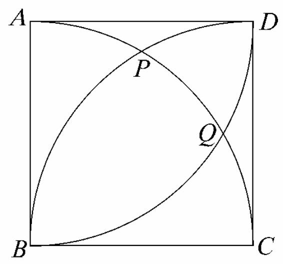


$\because$　$25\theta=15$　$\therefore$　$\theta=\dfrac{15}{25}=\dfrac{3}{5}=0.6$，

ΔABM 中，$\sin\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{\overline{BM}}{25}\Rightarrow\overline{BM}=25\sin\dfrac{\theta}{2}$

故弦長 $\overline{BC}=2\overline{BM}=2(25\sin\dfrac{\theta}{2})=50\sin 0.3=14.8$

14.正方形$ABCD$邊長爲 2，分別以A，B，C爲圓心，2 爲半徑，在正方形內部作三個圓弧如右圖，則

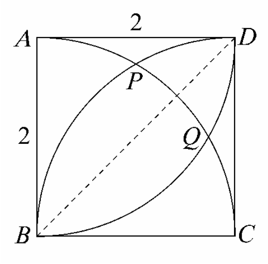


(1) $\overparen{BPD}$ 與 $\overparen{BQD}$ 兩弧圍成眼形區域面積爲 $=$__________。

(2) $\overparen{BP}$，$\overparen{PC}$ 與 $\overline{BC}$ 圍成區域面積爲 $=$__________。

答案：(1) $2\pi-4$　(2) $\dfrac{4\pi}{3}-\sqrt{3}$

解析：



(1)弓形BPD面積 $=$ 扇形BCD面積 $-$ $\triangle BCD$面積

$$=\frac{1}{2}\cdot 2^2\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\cdot 2^2=\pi-2$$

故所求眼形區域面積 $=2(\pi-2)=2\pi-4$

(2)因爲 $\overline{BC}=\overline{BP}=\overline{PC}=1$，故$\angle PBC=\angle PCB=\dfrac{\pi}{3}$

故所求區域面積 $=$(扇形PBC)$+$(扇形PCB)$-$ $\triangle BCP$

$$=\frac{1}{2}\cdot 2^2\cdot\frac{\pi}{3}+\frac{1}{2}\cdot 2^2\cdot\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}\cdot 2^2\cdot\sin\frac{\pi}{3}=\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}$$

15.$x\in R$，設 $y=f(x)=\dfrac{9+2\sin x}{2+\sin x}$，求$y$之範圍：__________。

答案：$[\dfrac{11}{3}$，$7]$

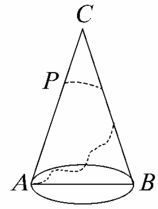
解析：

$$y=\frac{9+2\sin x}{2+\sin x}\quad\Rightarrow\quad 2y+y\sin x=9+2\sin x\quad\Rightarrow\quad (y-2)\sin x=9-2y\quad\Rightarrow\quad \sin x=\frac{9-2y}{y-2}$$

$\because \quad -1 \le \sin x \le 1 \quad \therefore \quad -1 \le \dfrac{9-2y}{y-2} \le 1 \Rightarrow \left| \dfrac{9-2y}{y-2} \right| \le 1$

$\Rightarrow |9-2y| \le |y-2| \quad \Rightarrow (9-2y)^2 \le (y-2)^2 \Rightarrow 3y^2 - 32y + 77 \le 0$

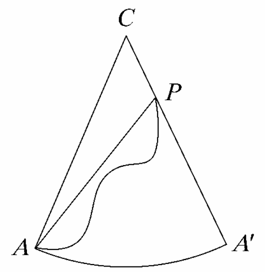
$\Rightarrow \quad (3y-11)(y-7) \le 0 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{11}{3} \le y \le 7$



16.如下圖：一直立圓錐之底圓直徑為 5，斜高 $\overline{CA} = \overline{CB} = 15$，一螞蟻從$A$點沿著錐面繞行一圈，至 $\overline{AC}$ 邊上之P點，若 $\overline{CP} = 5$，則其最短路徑為________。

答案：$5\sqrt{7}$

解析：



從 $\overline{AC}$ 剪開成一扇形，AA'弧長為 $5\pi \quad \Rightarrow 15\theta = 5\pi \Rightarrow \theta = \dfrac{\pi}{3}$

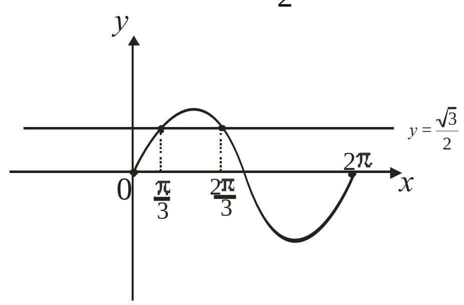
最短路徑為 $\overline{AP}$，由餘弦定理 $\overline{AP}^2 = 15^2 + 5^2 - 2 \cdot 15 \cdot 5 \cdot \cos\dfrac{\pi}{3}$，

得 $\overline{AP} = 5\sqrt{7}$

17.設 $0 \le x \le 2\pi$，$\sin x \le \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 之解為__________。

答案：$0 \le x \le \dfrac{\pi}{3}$ 或 $\dfrac{2\pi}{3} \le x \le 2\pi$

解析：於水平直線 $y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 下方之圖形皆為所求，此時 $0 \le x \le \dfrac{\pi}{3}$ 或 $\dfrac{2\pi}{3} \le x \le 2\pi$



18.若 $2k\pi + \dfrac{\pi}{2} < \theta < 2k\pi + \pi$，$k \in Z$，則 $\dfrac{\theta}{3}$ 可能為第幾象限角？____________________

答案：一、二、四

解析：

(方法一)

因為 $2k\pi + \dfrac{\pi}{2} < \theta < 2k\pi + \pi$，$k \in Z$，所以$\theta$是第二象限角 $\quad \Rightarrow \quad \dfrac{2k\pi}{3} + \dfrac{\pi}{6} < \dfrac{\theta}{3} < \dfrac{2k\pi}{3} + \dfrac{\pi}{3}$

由於 k 為整數，因此考慮

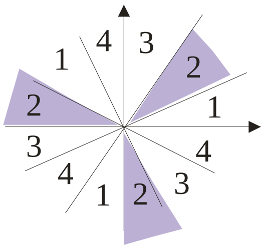
①當 $k = 3n$ 時，則 $2n\pi + \dfrac{\pi}{6} < \dfrac{\theta}{3} < 2n\pi + \dfrac{\pi}{3}$，故 $\dfrac{\theta}{3}$ 為第一象限角

②當 $k = 3n+1$ 時，則 $2n\pi + \dfrac{5\pi}{6} < \dfrac{\theta}{3} < 2n\pi + \pi$，故 $\dfrac{\theta}{3}$ 為第二象限角

③當 $k = 3n+2$ 時，則 $2n\pi + \dfrac{3\pi}{2} < \dfrac{\theta}{3} < 2n\pi + \dfrac{5\pi}{3}$，故 $\dfrac{\theta}{3}$ 為第四象限角

上述 n 為整數，綜合①②及③的討論，可知：$\frac{\theta}{3}$ 可能為第一、二、四象限角

(方法二)



19.試求下列各函數的週期：

(1) $f(x) = |2\cos(3x+\frac{\pi}{4})+1|$。 (2) $g(x) = \frac{\cos x}{1+\sin x} + \frac{1+\sin x}{\cos x}$。 (3) $h(x) = \frac{|\sec x|}{\sec x}$。

(4) $k(x) = 2\sin(3x+\frac{\pi}{3}) + \cos(\frac{2x}{3}-\frac{\pi}{6}) + 1$。

答案：(1) $\frac{2\pi}{3}$ (2) 2π (3) 2π (4) 6π

解析：

(1)因為$|2\cos x + 1|$週期為 2π，故 $f(x) = |2\cos(3x+\frac{\pi}{4})+1|$ 的週期為 $\frac{2\pi}{3}$

(2)因為 $g(x) = \frac{\cos x}{1+\sin x} + \frac{1+\sin x}{\cos x} = \frac{\cos^2 x + (1+\sin x)^2}{\cos x \cdot (1+\sin x)} = \frac{2(1+\sin x)}{\cos x \cdot (1+\sin x)} = \frac{2}{\cos x} = 2\sec x$

所以 $g(x)$的週期為 2π

(3)因為 $h(x) = \frac{|\sec x|}{\sec x} = \begin{cases} 1，-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ -1，\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} \end{cases}$，故可知 $h(x)$的週期為 2π

(4)令 $k(x) = 2\sin(3x+\frac{\pi}{3}) + \cos(\frac{2x}{3}-\frac{\pi}{6}) + 1$

$\frac{2\pi}{3}$，$\frac{2\pi}{\frac{2}{3}} = 3\pi = \frac{9\pi}{3}$ $\Rightarrow$ 所求週期為 $p = \frac{[2,9]}{3}\cdot\pi = \frac{18}{3}\cdot\pi = 6\pi$

20.一扇形的周長為定值 k，試求此扇形的最大面積，並求此時扇形的半徑。

答案：$\frac{k^2}{16}$；$\frac{k}{4}$

解析：

設扇形半徑為r，圓心角為θ，則$k = 2r + r\theta$，面積$a = \frac{1}{2}r^2\theta \Rightarrow 2a = r^2\theta$

由算術平均數≥幾何平均數可得

$\frac{2r+r\theta}{2} \ge \sqrt{2r^2\theta}$ $\Rightarrow$ $\frac{k}{2} \ge \sqrt{2\cdot 2a}$ $\Rightarrow$ $\frac{k^2}{4} \ge 2\cdot 2a = 4a$ $\therefore$ $\frac{k^2}{16} \ge a$

故當 $2r = r\theta$時，即$\theta = 2$ 時，扇形有最大面積$\frac{k^2}{16}$

此時，將$\theta=2$ 代入$k=2r+r\theta$可解得半徑$r=\dfrac{k}{4}$

21.(1)試作出函數$f(x)=\sin x+|\sin x|$，（$0\le x\le 4\pi$）的圖形。

(2)方程式$\sin x+|\sin x|=\log_3 x$之實根個數爲何？

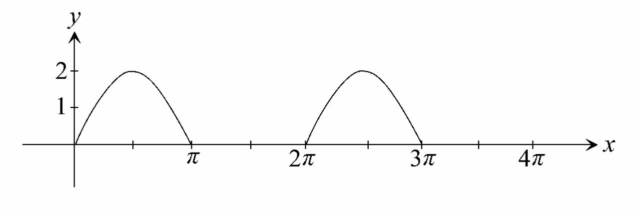
答案：(1)如圖　(2)3 個

解析：

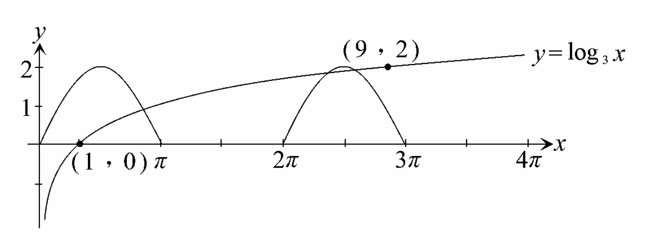
(1) $f(x)=\sin x+|\sin x|$，（$0\le x\le 4\pi$）

$\begin{cases}\text{當}\sin x\ge 0\text{時，}f(x)=2\sin x\\ \text{當}\sin x<0\text{時，}f(x)=0\end{cases}$

故圖形如右所示：



(2) $\begin{cases}y=\sin x+|\sin x|\\ y=\log_3 x\end{cases}$



兩函數圖形有 3 個交點，故$\sin x+|\sin x|=\log_3 x$有 3 個實根

22.設$f(x)=2\cos(x-\dfrac{\pi}{3})+1$，$x\in R$。

(1)試求$f(x)$的週期。

(2)試在 $-2\pi\le x\le 2\pi$畫出$y=f(x)$的圖形，並寫出波峰及波谷的坐標。

答案：2π

解析：

(1)設 $f(x)=2\cos(x-\dfrac{\pi}{3})+1$ 的週期爲 p，則 $f(x+p)=f(x)$

即 $2\cos(x+p-\dfrac{\pi}{3})+1=2\cos(x-\dfrac{\pi}{3})+1 \quad\Rightarrow\quad \cos(x+p-\dfrac{\pi}{3})=\cos(x-\dfrac{\pi}{3})$

$\therefore\quad x+p-\dfrac{\pi}{3}=2m\pi+(x-\dfrac{\pi}{3})$，$m\in Z$

$\because\quad 2m\pi$，$m\in Z$ 的最小正數 $p=2\pi$，且

$f(x+2\pi)=2\cos(x+2\pi-\dfrac{\pi}{3})+1=2\cos(x-\dfrac{\pi}{3})+1=f(x)$，因此 $f(x)$的週期爲 2π

(2)將 $y=\cos x$ 的圖形，向右平移$\dfrac{\pi}{3}$單位得 $y=\cos(x-\dfrac{\pi}{3})$的圖形

再平行 y 軸方向伸縮 2 倍，而得 $y=2\cos(x-\dfrac{\pi}{3})$的圖形

又向上平移 1 單位，得 $y=2\cos(x-\dfrac{\pi}{3})+1$ 的圖形

繪圖如下：波峰爲$(-\frac{5\pi}{3}, 3)$及$(\frac{\pi}{3}, 3)$，波谷爲$(-\frac{2\pi}{3}, -1)$及$(\frac{4\pi}{3}, -1)$