<table>
<tr><td colspan="6">高雄市明誠中學 高一數學平時測驗 日期：93.05.10</td></tr>
<tr><td rowspan="2">範圍</td><td rowspan="2">2-6 測量+Ans</td><td>班級</td><td></td><td rowspan="2">姓名</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>座號</td><td></td></tr>
</table>

一. 選擇題(每題 10 分)

1. 由查表得 $\cot 115°40' = -0.4806$，$\cot 115°50' = -0.4841$，下列何者正確？

(A) $\cot 295°14' = -0.4820$ (B) $\tan 334°14' = -0.4820$ (C) $\tan 205°46' = 0.4827$

(D) $\cot 244°16' = 0.4827$ (E) $\cot 64°18' = 0.4834$

答案：(C)

解析：

$\cot 115°40' = \cot(180° - 64°20') = -0.4806 \quad \Rightarrow \quad \cot 64°20' = 0.4806$

同理 $\cot 64°10' = 0.4841$

(A) $\cot 295°14' = \cot(360° - 64°46') = -\cot 64°46' = 0.4715$

(B) $\tan 334°14' = \tan(270° + 64°14') = -\cot 64°14' = -0.4827$

(C) $\tan 205°46' = \tan(180° + 25°46') = \tan 25°46' = \cot 64°14' = 0.4827$

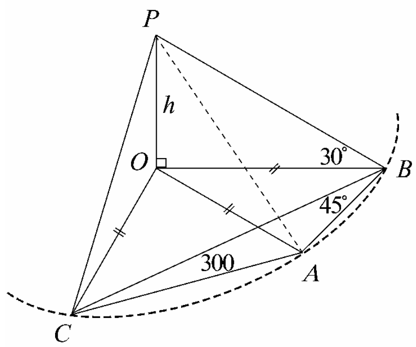
(D) $\cot 244°16' = \cot(180° + 64°16') = \cot 64°16' = 0.4820$

(E) $\cot 64°18' = 0.4813$

二、填充題(每題 10 分)

2.從平地上A，B，C三點測得新光大樓樓頂之仰角均爲 30°。若$\angle ABC = 45°$，而$\overline{AC} = 300$公尺，則此大樓的高爲__________公尺。

答案：$50\sqrt{6}$ 公尺



解析：

從 A，B，C 三點測得樓頂之仰角均爲 30°

$\Rightarrow$ 如圖：$\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC}$ 且 A，B，C 共圓

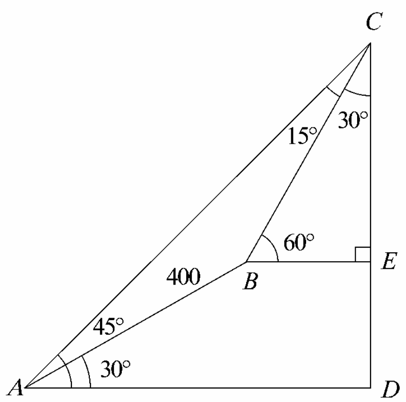
設$\overline{OP} = h \quad \Rightarrow \quad \overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = \sqrt{3}\,h$

於△ABC 中，$\overline{AC} = 2R\sin 45°$，$R = \overline{OA}$

$\Rightarrow \quad 300 = 2 \cdot \sqrt{3}\,h \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad h = 50\sqrt{6}$

3. 某人於山麓測得山頂的仰角 45°，由山麓循 30°斜坡上行 400 公尺，再測得山頂的仰角 60°，則山高爲__________公尺。

答案：$200(\sqrt{3} + 1)$



解析：

如左圖，在△ABC 中

$\because \quad \angle CAB = 45° - 30° = 15°$，

$\angle ACB = \angle ACD - \angle BCE = 45° - 30° = 15°$

故得$\angle ABC = 150°$，

由正弦定理可得$\dfrac{\overline{AC}}{\sin 150°} = \dfrac{\overline{AB}}{\sin 15°}$

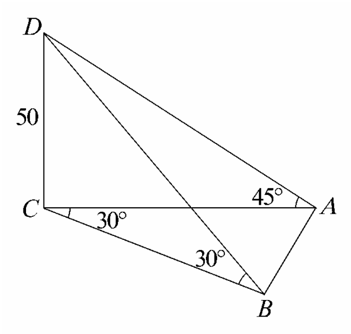
$\Rightarrow \quad \overline{AC} = \dfrac{400 \cdot \sin 150°}{\sin 15°}$

在△ACD 中，$\overline{CD}=\overline{AC}\sin 45° = \dfrac{400 \cdot \sin 150° \cdot \sin 45°}{\sin 15°} = \dfrac{400 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}} = 200(\sqrt{3}+1)$

故所求山高為 $200(\sqrt{3}+1)$公尺

4. 在山頂測得地面上石頭A的俯角為 45°，向右轉 30°，再測得地面上石頭B的俯角為 30°，已知山高為 50 公尺，則 $\overline{AB}$ ＝__________公尺。

答案：50



解析：

由D測A的俯角為 45° ⇒ 由A測D的仰角為 45°

由D測B的俯角為 30° ⇒ 由B測D的仰角為 30°

在D測A俯角後，向右轉 30°即$\angle ACB$ = 30°（不是$\angle ADB$ = 30°）

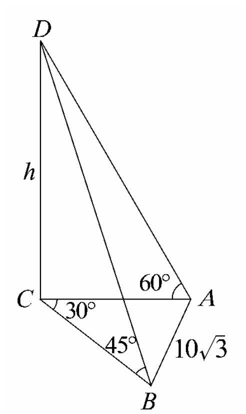
∴ $\overline{AC} = 50$，$\overline{BC} = 50\sqrt{3}$

由餘弦定理 $\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 - 2\,\overline{BC} \cdot \overline{AC}\cos\angle ACB$

$= 50^2 + (50\sqrt{3})^2 - 2(50)(50\sqrt{3}) \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 50^2 \Rightarrow \overline{AB} = 50$

5. 一塔高為h，石頭A在塔的正東，石頭B在塔的東 30°南，一人從塔頂測得石頭A的俯角為 60°，石頭B之俯角為 45°，若 $\overline{AB} = 10\sqrt{3}$ 公尺，則塔高h = __________公尺。

答案：30



解析：

由D測A的俯角為 60° ⇒ 由A測D的仰角為 60°

由D測B的俯角為 45° ⇒ 由B測D的仰角為 45°

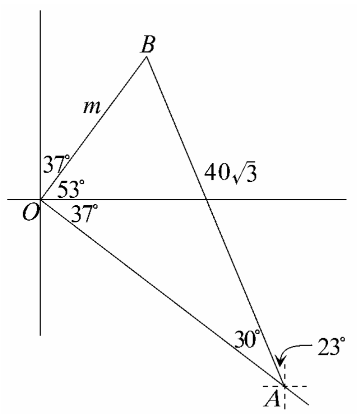
∴ $\overline{BC} = h$，$\overline{AC} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}h$，

餘弦定理，$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2\,\overline{AC} \cdot \overline{BC}\cos 30°$

$\Rightarrow 300 = h^2 + \dfrac{1}{3}h^2 - 2 \cdot h \cdot \dfrac{h}{\sqrt{3}} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{1}{3}h^2$

$\Rightarrow h^2 = 900 \Rightarrow h = 30$（公尺）

6. 某船以每小時 20 公里之速度向南 53°東航行，於上午十時測得燈塔之方向為北 37°東，此時船與燈塔之距離為m公里，至同日t時，測得該塔之方向為北 23°西，此時船與燈塔之距離為 $40\sqrt{3}$ 公里，則m = __________公里，且 t = __________時。



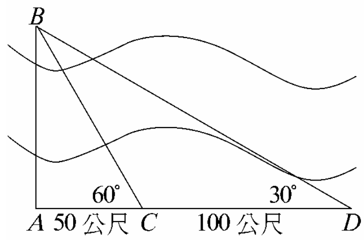
答案：$20\sqrt{3}$；13

解析：

如圖：$\angle AOB = 37° + 53° = 90°$，$\angle OAB = 53° - 23° = 30°$

在△OAB 中，$\sin 30° = \dfrac{\overline{OB}}{\overline{AB}} \Rightarrow \dfrac{1}{2} = \dfrac{m}{40\sqrt{3}} \Rightarrow m = 20\sqrt{3}$

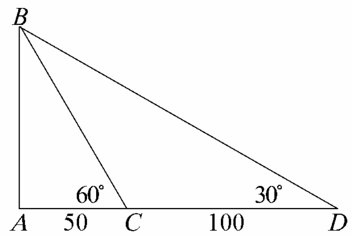
$\overline{OA} = 60 \Rightarrow t = 10 + \dfrac{60}{20} = 13$，即爲上午 13 時，也就是下午 1 時



7. 如圖，A，B兩點分別位於一河口的兩岸邊。某人在通往A點的筆直公路上，距離A點 50 公尺的C點與距離A點 150 公尺的D點，分別測得$\angle ACB = 60°$，$\angle ADB = 30°$，則A與B的距離爲公尺。

答案：$50\sqrt{3}$

解析：



$\angle ACB = 60°$，$\angle ADB = 30° \Rightarrow \overline{BC} = \overline{CD} = 100$

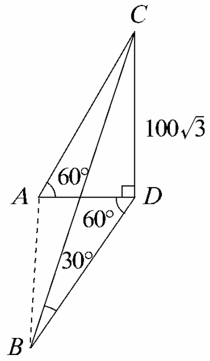
在△ABC 中，$\overline{AB} = \overline{BC}\sin 60° = 100 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 50\sqrt{3}$

(或代入高度公式 $h = \dfrac{a}{\cot\alpha - \cot\beta}$)

8. 有一塔高 $100\sqrt{3}$ 公尺，樹A在塔的正西方，樹B在塔的西 60°南，某人自塔頂測得樹A，樹B之俯角分別爲 60°與 30°，則A，B的距離爲__________公尺。

答案：$100\sqrt{7}$

解析：



$\overline{DA} = \overline{CD}\cot 60° = 100\sqrt{3} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{3}} = 100$，$\overline{DB} = \overline{CD}\cot 30° = 100\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 300$

$\overline{AB}^2 = \overline{DA}^2 + \overline{DB}^2 - 2\,\overline{DA} \cdot \overline{DB}\cos 60°$

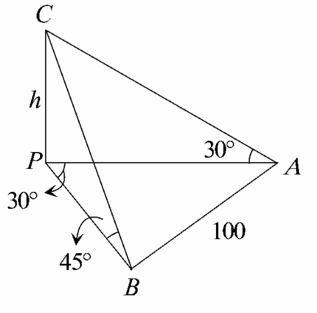
$= 100^2 + 300^2 - 2 \cdot 100 \cdot 300 \cdot \dfrac{1}{2} = 70000$

$\therefore \overline{AB} = 100\sqrt{7}$

9. 在地面上相距 100 公尺的兩點A、B測得塔頂的仰角分別爲 30°與 45°，塔底爲P，若$\angle APB = 30°$，則塔高爲 =__________公尺。

答案：100

解析：



設塔高爲h，則 $\overline{AP} = \sqrt{3}\,h$，$\overline{BP} = h$

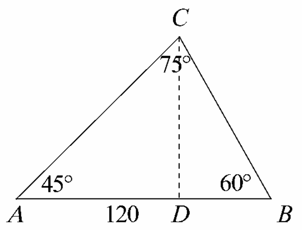
$\therefore 100^2 = (\sqrt{3}\,h)^2 + h^2 - 2 \cdot \sqrt{3}\,h \cdot h \cdot \cos 30°$

$\Rightarrow 100^2 = 3h^2 + h^2 - 3h^2 = h^2 \Rightarrow h = 100$

10.某生欲測一河流的寬度，在岸邊取二點 A，B，在對岸另取一點 C，並測得$\angle CAB = 45°$，$\angle CBA = 60°$，而 $\overline{AB} = 120$ 公尺，求河寬____________公尺。

答案：$60(3-\sqrt{3})$

解析：



如左圖，$\triangle ABC$ 中

$\because$ $\angle CAB=45°$，$\angle CBA=60° \Rightarrow$ $\angle ACB=75°$，

由正弦定理可得

$$\frac{\overline{AC}}{\sin 60°}=\frac{\overline{AB}}{\sin 75°} \Rightarrow \overline{AC}=\frac{120\cdot\sin 60°}{\sin 75°}=60\sqrt{3}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$$

$\because$ $\overline{CD}\perp\overline{AB}$，

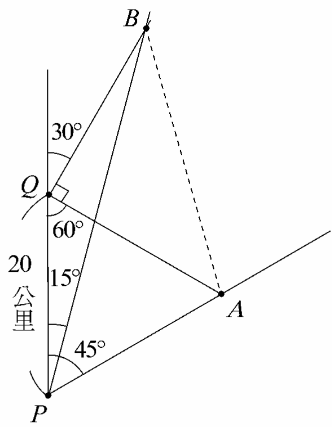
故 $\overline{CD}=\overline{AC}\sin 45°=60\sqrt{3}(\sqrt{6}-\sqrt{2})\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=60(3-\sqrt{3})$ 公尺

11.有一船自定點 P 往正北方向航行，在其右側發現有二燈塔 A 與 B，經測量其方位「A 在北 45°東，B 在北 15°東」，該船行駛 20 公里到達 Q 點後，再測得二燈塔方位「A 在南 60°東，B 在北 30°東」，（已知 $\sin 15°=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$）

試求：(1)點 Q 與燈塔 A 的距離__________公里。　(2)兩燈塔的距離_________公里。

答案：(1) $20(\sqrt{3}-1)$公里　(2) $20\sqrt{5-2\sqrt{3}}$ 公里

解析：



(1) 在$\triangle APQ$中，

$\angle APQ=45°$，$\angle AQP=60°$，$\angle QAP=180°-45°-60°=75°$，

$\overline{PQ}=20$，由正弦定理 $\frac{\overline{AQ}}{\sin 45°}=\frac{\overline{PQ}}{\sin 75°}$

$$\Rightarrow \overline{AQ}=\frac{\overline{PQ}\cdot\sin 45°}{\sin 75°}=\frac{20\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}=20(\sqrt{3}-1)$$

故點Q與燈塔A的距離爲 $20(\sqrt{3}-1)$公里

(2)在$\triangle BPQ$中，$\angle QPB=15°$，$\angle BQP=150° \Rightarrow \angle QBP=180°-15°-150°=15°$，

故得 $\overline{BQ}=\overline{PQ}=20$

在$\triangle ABQ$中 $\because$ $\overline{AQ}=20(\sqrt{3}-1)$，$\overline{BQ}=20$，而$\angle AQB=90°$

故由餘弦定理知 $\overline{AB}^2=\overline{AQ}^2+\overline{BQ}^2-2\overline{AQ}\cdot\overline{BQ}\cdot\cos 90°$

$$=[20(\sqrt{3}-1)]^2+20^2-2\cdot 20(\sqrt{3}-1)\cdot 20\cdot 0=400(5-2\sqrt{3})$$

$\therefore$ $\overline{AB}=20\sqrt{5-2\sqrt{3}}$，即兩燈塔的距離爲 $20\sqrt{5-2\sqrt{3}}$ 公里

12.氣象預報一颱風中心在 A 地東 30°南的海面上 B 處，以每小時 60 公里的速率向北 30°西方向直線前進，暴風半徑爲 $80\sqrt{21}$ 公里，且 A，B 相距 $400\sqrt{3}$ 公里，預估幾小時後 A 地進入暴風圈，又颱風將在 A 地滯留幾小時？於_______小時後進入；滯留_______小時

答案：8 小時後 A 地進入暴風圈，滯留 4 小時

解析：

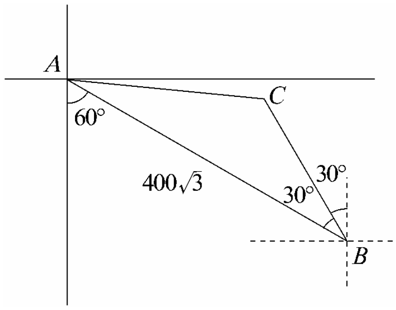
設t小時後，颱風中心到達C，則 $\overline{BC}=60t$，$\overline{AB}=400\sqrt{3}$，$\angle ABC=30°$

$\therefore\quad \overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-2\,\overline{AB}\cdot\overline{BC}\cos30°=480000+3600t^2-72000t$

令$\overline{AC}=80\sqrt{21}$，則 $480000+3600t^2-72000t=134400$

$\Rightarrow\quad t^2-20t+96=0\quad\Rightarrow\quad(t-8)(t-12)=0\quad\Rightarrow\quad t=8$ 或 $t=12$

故 8 小時後A進入暴風圈，12 小時後脫離，共滯留了 4 小時



13.某人在一飛機的正南方見其仰角為 45°，若此飛機平行地面向西飛行 1000 公尺後，在原地測得其仰角為 30°，求飛機的高度_______公尺。

答案：$500\sqrt{2}$ 公尺

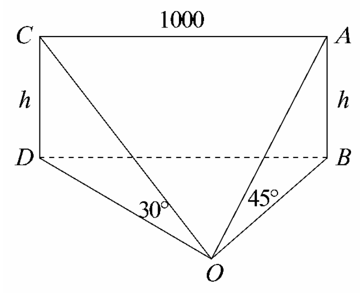
解析：

如右圖，令飛機由A平行地面向西飛 1000 公尺至C，其高度為h公尺。在$\triangle OBD$中

$\angle OBD=90°$，$\overline{OB}=h$，$\overline{OD}=h\cot30°=\sqrt{3}\,h$

故由畢氏定理知：$\overline{OD}^2=\overline{OB}^2+\overline{BD}^2\quad\Rightarrow\quad(\sqrt{3}\,h)^2=h^2+1000^2$

$\therefore\quad 2h^2=1000^2\quad\therefore\quad h=500\sqrt{2}$，故飛行的高度為 $500\sqrt{2}$ 公尺



14.A，B，C 三地兩兩相距 14 公里。甲從 A 地出發走向 B 地，在同一時間乙從 B 地出發走向 C 地，已知甲速為乙速的 2 倍，試求甲、乙兩人間的最短距離。

答案：$\sqrt{21}$

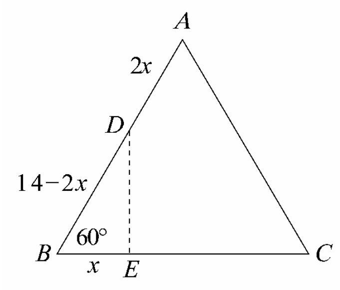
解析：

如右圖，甲由A至D走了 $2x$公里，乙由B至E走了x公里

則在$\triangle BDE$中，$\overline{BD}=14-2x$，$\overline{BE}=x$，$\angle DBE=60°$，

由餘弦定理知：

$\overline{DE}^2=(14-2x)^2+x^2-2x\cdot(14-2x)\cos60°=7(x-5)^2+21$，其中 $0\le x\le 7$，故當$x=5$ 時，$\overline{DE}$ 的最小值為$\sqrt{21}$



15.在東西向的道路上，依序在 A，B，C 三點觀測道路北方一座山，測得山頂 D 的仰角分別為 30°，45°，60°

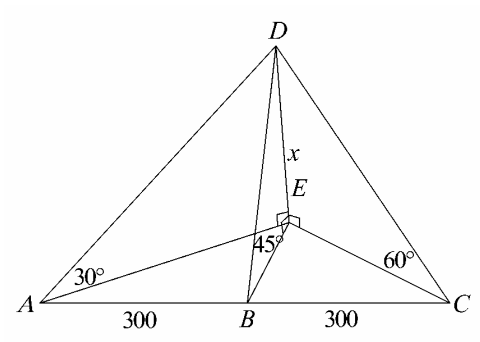
(1)若 $\overline{AB}=\overline{BC}=300$ 公尺，求山高 =？__________公尺

(2)若仰角不變，但 $\overline{AB}=300$ 公尺，$\overline{BC}=200$ 公尺，求山高 =？___________公尺

答案：(1) $150\sqrt{6}$ 公尺　(2)$100\sqrt{15}$

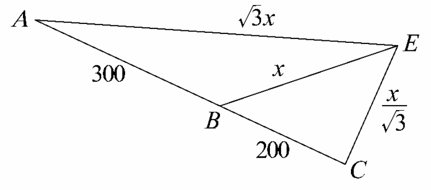
解析：

(1)由$\begin{cases}\text{直角}\triangle ADE\text{可得}\overline{AE}=\sqrt{3}x\\ \text{直角}\triangle BDE\text{可得}\overline{BE}=x\\ \text{直角}\triangle CDE\text{可得}\overline{CE}=\dfrac{x}{\sqrt{3}}\end{cases}$



於△ACE中，利用中線定理$(\sqrt{3}x)^2+(\frac{x}{\sqrt{3}})^2=2(x^2+300^2) \quad \Rightarrow \quad x=150\sqrt{6}$

(2)

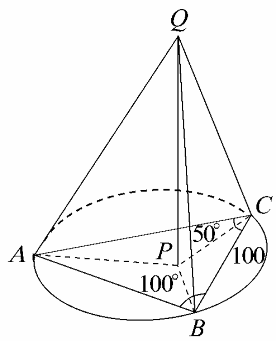


由餘弦定理$\cos A=\dfrac{(\sqrt{3}x)^2+300^2-x^2}{2\cdot\sqrt{3}x\cdot 300}=\dfrac{(\sqrt{3}x)^2+500^2-(\frac{x}{\sqrt{3}})^2}{2\cdot\sqrt{3}x\cdot 500} \quad \Rightarrow \quad x=100\sqrt{15}$

16.設 A，B，C 三點，$\overline{BC}=100$ 公尺，$\angle ABC=100°$，$\angle ACB=50°$。若同時於 A，B，C 三處測得天空中同一氣球的仰角均爲 75°，試求此時氣球的高度。

答案：$100(2+\sqrt{3})$公尺

解析：



如圖，令氣球高度$\overline{PQ}=h$，因爲在 A，B，C 三點測得氣球的仰角均爲 75°，故$\overline{PA}=\overline{PB}=\overline{PC}=h\cot 75°$，即 P 爲△ABC 的外心

因爲$\angle ABC=100°$，$\angle ACB=50°$，所以$\angle BAC=30°$，故圓心角$\angle BPC=60°$

因爲$\overline{PB}=\overline{PC}=h\cot 75°$，且$\angle BPC=60°$，故知△$BPC$ 是正三角形，於是 $h\cot 75°=\overline{BC}=100 \quad \Rightarrow \quad h=100\tan 75°=100(2+\sqrt{3})$公尺