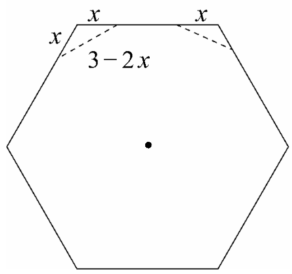
高雄市明誠中學 高一數學平時測驗 日期：93.05.06					
範圍	2-5 正餘弦定理+Ans	班級		姓名	
		座號			

一. 單選題(每題 10 分)

1. 有一邊長為 3 的正六邊形紙板，今在每一個角各剪掉一個小三角形，使其成為正十二邊形之紙板，則此正十二邊形之一邊長為(A) 1 (B) $\frac{3}{2}$ (C) $\sqrt{3}$ (D) $\frac{3\sqrt{3}-3}{2}$ (E) $6\sqrt{3}-9$

答案：(E)

解析：



令所截去三角形的腰長為x，則所得正十二邊形之一邊長為 $3-2x$

如圖，由餘弦定理知$(3-2x)^2 = x^2 + x^2 - 2x \cdot x\cos 120^\circ$

$\therefore\ x^2 - 12x + 9 = 0 \quad \therefore\ x = 6 \pm 3\sqrt{3}$（正號不合）

故正十二邊形的邊長是 $3-2(6-3\sqrt{3}) = 6\sqrt{3}-9$

2. 對△ABC 而言，下列敘述何者正確？(複選)

(A)若 $\sin A = \frac{1}{2}$，則$\angle A = 30^\circ$ (B)若 $\cos A > 0$，則$\angle A$ 必為銳角 (C)若 $\sin(B-C) = 1$，則△ABC 為鈍角三角形 (D) $\sin A + \sin B > \sin C$ 恆成立 (E) $\cos\frac{1}{2}(A-B)$必為正值

答案：(B)(C)(D)(E)

解析：

(A) $\sin A = \frac{1}{2} \Rightarrow \angle A = 30^\circ$或 150°

(B)若$\cos A > 0 \Rightarrow 0^\circ < A < 90^\circ \Rightarrow \angle A$為銳角

(C)若$\sin(B-C) = 1 \Rightarrow B - C = 90^\circ \Rightarrow \angle B > 90^\circ \Rightarrow$ △ABC為鈍角三角形

(D)$\because\ a + b > c \Rightarrow 2R\sin A + 2R\sin B > 2R\sin C$（利用$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$）

$\Rightarrow \sin A + \sin B > \sin C$

(E)

$$\begin{array}{rrcccl} & 0^\circ & < & A & < & 180^\circ \\ +) & -180^\circ & < & -B & < & 0^\circ \\ \hline & -180^\circ & < & A-B & < & 180^\circ \end{array}$$

$\Rightarrow -90^\circ < \frac{A-B}{2} < 90^\circ \qquad \therefore\ \cos\frac{A-B}{2} > 0$ 恆成立

3. 滿足下列條件的△ABC，何者恰有一解？(複選)

(A) $a = 1$，$b = \sqrt{2}$，$\angle A = 30^\circ$ (B) $\angle A = 30^\circ$，$\angle B = 60^\circ$，$\angle C = 90^\circ$

(C) $a = 2$，$b = 3$，$c = 5$ (D) $a = \sqrt{6}+\sqrt{2}$，$b = 2$，$\angle A = 105^\circ$

(E) $\angle A = 60^\circ$，$\angle B = 45^\circ$，$b = 2$

答案：(D)(E)

解析：(A)由正弦定理$\frac{1}{\sin 30^\circ} = \frac{\sqrt{2}}{\sin B} \Rightarrow \sin B = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \angle B = 45^\circ$或 135°，故有 2 解

(B)由 AAA 公式知，滿足此條件的三角形有無限多個

(C)$\because$　$a+b=c$　$\therefore$　無解

(D)由正弦定理$\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sin 105°}=\dfrac{2}{\sin B}\Rightarrow$　$\sin B=\dfrac{1}{2}$　$\Rightarrow$　$\angle B=30°$或$150°$（不合），恰有 1 解

(E)由正弦定理$\dfrac{a}{\sin 60°}=\dfrac{2}{\sin 45°}$　$\Rightarrow$　$a=\sqrt{6}$，恰有 1 解

二、填充題(每題 10 分)

4. 銳角△ABC中，$\sin A=\dfrac{3}{5}$，則$\dfrac{a\sin C}{b-a\cos C}$　= __________。

答案：$\dfrac{3}{4}$

解析：$\dfrac{a\sin C}{b-a\cos C}=\dfrac{a\sin C}{a\cos C+c\cos A-a\cos C}=\dfrac{a\sin C}{c\cos A}=\dfrac{2R\sin A\sin C}{2R\sin C\cos A}=\dfrac{\sin A}{\cos A}=\tan A=\dfrac{3}{4}$

5. 若△ABC的三邊分別為 4，5，7，試求出

(1)△ABC的面積 = __________。　(2)內切圓半徑 = __________。

答案：(1) $4\sqrt{6}$　(2) $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

解析：(1)利用海龍公式，$s=\dfrac{1}{2}(4+5+7)=8$，則

$$\triangle ABC=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=\sqrt{8(8-4)(8-5)(8-7)}=4\sqrt{6}$$

(2) $r=\dfrac{\triangle}{s}=\dfrac{4\sqrt{6}}{8}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

6. △ABC之三邊長分別為$\overline{AB}=5$，$\overline{BC}=6$，$\overline{AC}=7$，若$\angle A$之外角平分線交直線BC於D，則$\overline{AD}$長為__________。

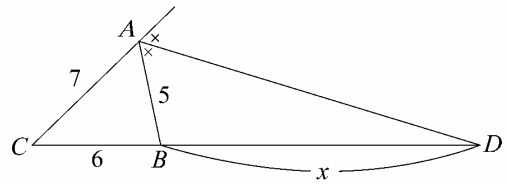
答案：$2\sqrt{70}$

解析：

$\dfrac{\overline{CD}}{\overline{BD}}=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$　$\Rightarrow$　$\dfrac{x+6}{x}=\dfrac{7}{5}$　$\Rightarrow$　$\overline{BD}=x=15$

由△ABC 及△ACD 中，利用餘弦定理

可得 $\cos C=\dfrac{7^2+6^2-5^2}{2\cdot 7\cdot 6}=\dfrac{7^2+21^2-\overline{AD}^2}{2\cdot 7\cdot 21}$　$\Rightarrow$　$\overline{AD}=\sqrt{280}=2\sqrt{70}$



7. △ABC中，$\overline{AB}=\sqrt{3}+1$，$\overline{AC}=\sqrt{2}$，$\angle C=105°$，則

(1) $\overline{BC}=$ __________。　(2) $\angle B=$ __________。

答案：(1) 2　(2) 30°

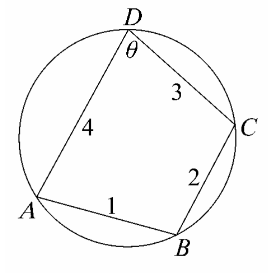
解析：

$$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}\Rightarrow\frac{\sqrt{2}}{\sin B}=\frac{\sqrt{3}+1}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}\Rightarrow\sin B=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\times\sqrt{2}\times\frac{1}{\sqrt{3}+1}=\frac{1}{2}\Rightarrow\angle B=30°$$

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}\Rightarrow\frac{a}{\sin 45°}=\frac{\sqrt{2}}{\frac{1}{2}}\Rightarrow a=\sqrt{2}\times\frac{2}{1}\times\sin 45°=2$$

8. 設四邊形$ABCD$內接於一圓且 $\overline{AB}=1$，$\overline{BC}=2$，$\overline{CD}=3$，$\overline{DA}=4$，則 $\overline{AC}=$__________，□$ABCD$的面積爲__________。

答案：$\sqrt{\frac{55}{7}}$ ；$2\sqrt{6}$



如右圖：設$\angle ADC=\theta$，則$\angle ABC=180°-\theta$　(圓內接四邊形對角互補)，由餘弦定理知

$\overline{AC}^2=9+16-2\cdot 3\cdot 4\cdot\cos\theta=25-24\cos\theta$……①

$\overline{AC}^2=1+4-2\cdot 1\cdot 2\cdot\cos(180°-\theta)=5+4\cos\theta$……②

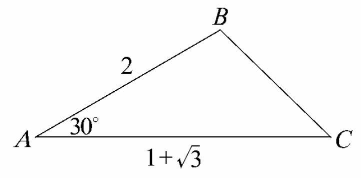
消去$\cos\theta$，① + ② × 6，$7\overline{AC}^2=25+30=55\quad\Rightarrow\quad\overline{AC}=\sqrt{\frac{55}{7}}$

又由$\overline{AC}^2=\frac{55}{7}$代入②　$\Rightarrow\quad\cos\theta=\frac{5}{7}\quad\Rightarrow\quad\sin\theta=\frac{2\sqrt{6}}{7}$

∴　四邊形$ABCD$之面積 $=\frac{1}{2}(1\cdot 2+3\cdot 4)\sin\theta=2\sqrt{6}$

9. 設△ABC中，$\overline{AB}=2$，$\overline{CA}=1+\sqrt{3}$，$\angle A=30°$，則$\overline{BC}$的長度爲__________，$\angle C$的大小爲__________度。

答案：$\sqrt{2}$ ；45°



解析：

(1)根據餘弦定理可得

$\overline{BC}^2=2^2+(1+\sqrt{3})^2-2\cdot 2\cdot(1+\sqrt{3})\cos 30°$

$=4+(4+2\sqrt{3})-2\sqrt{3}\cdot(1+\sqrt{3})=2\qquad\therefore\quad\overline{BC}=\sqrt{2}$

(2)因爲$b=1+\sqrt{3}>2=c$，故$\angle C$爲銳角，由正弦定理知

$$\frac{2}{\sin C}=\frac{\sqrt{2}}{\sin 30°}\quad\Rightarrow\quad\sin C=\frac{2}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\quad\therefore\quad\angle C=45°$$

10.△ABC之三邊長爲 8，10，12，則

(1)△ABC之外接圓半徑爲__________。(3)△ABC最大邊上之中線長爲__________。

答案：(1) $15\sqrt{7}$　(2) $\frac{16\sqrt{7}}{7}$　(3) $\sqrt{46}$

解析：(1)$s=\frac{1}{2}(8+10+12)=15$，由<u>海龍</u>公式△$=\sqrt{15\cdot 3\cdot 5\cdot 7}=15\sqrt{7}$

由△$=\frac{abc}{4R}\quad\Rightarrow\quad 15\sqrt{7}=\frac{8\times 10\times 12}{4R}\quad\Rightarrow\quad R=\frac{240}{15\sqrt{7}}=\frac{16\sqrt{7}}{7}$

(2)最大邊上之中線長 $=\frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}=\frac{1}{2}\sqrt{2\cdot 8^2+2\cdot 10^2-12^2}=\sqrt{46}$

11.△ABC中，$\overline{AB}=2$，$\overline{AC}=3$，$\angle A=60°$，$\angle A$的平分線交$\overline{BC}$於D，又其外角平分線交$\overleftrightarrow{BC}$

於E，則(1) $\overline{AD}=$ ＿＿＿＿＿＿ 。　(2) $\overline{AE}=$ ＿＿＿＿＿＿ 。

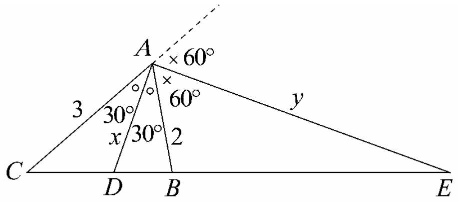
答案：(1) $\dfrac{6\sqrt{3}}{5}$　(2) 6

解析：(1)設 $\overline{AD}=x$，由△ABC 面積 =△ACD 面積 +△ABD 面積

$\therefore \dfrac{1}{2}\cdot 3\cdot 2\sin 60°=\dfrac{1}{2}\cdot 3x\sin 30°+\dfrac{1}{2}\cdot 2x\sin 30° \Rightarrow 6\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=3x\cdot\dfrac{1}{2}+2x\cdot\dfrac{1}{2}\Rightarrow x=\dfrac{6\sqrt{3}}{5}$

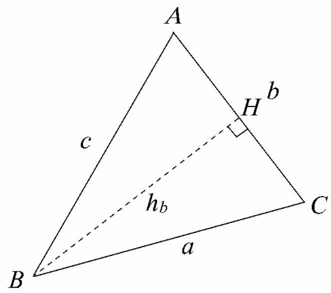
(2)設 $\overline{AE}=y$，由△ACE 面積 =△ACB 面積 +△ABE 面積

$\therefore\ \dfrac{1}{2}\cdot 3y\sin 120°=\dfrac{1}{2}\cdot 3\cdot 2\sin 60°+\dfrac{1}{2}\cdot 2y\sin 60° \Rightarrow 3y=6+2y \Rightarrow y=6$



12.△ABC中，三邊 $\overline{AB}$ ，$\overline{BC}$ ，$\overline{CA}$ 的高分別爲$h_c=3$，$h_a=6$，$h_b=4$，則$\cos A=$ ＿＿＿＿＿＿ ，$\overline{BC}$ = ＿＿＿＿＿＿ ，△ABC的外接圓半徑$R=$ ＿＿＿＿＿＿ 。

答案：$\dfrac{7}{8}$ ，$\dfrac{16}{\sqrt{15}}$ ，$\dfrac{64}{15}$



解析：

(1)$\because\ a:b:c=\dfrac{1}{h_a}:\dfrac{1}{h_b}:\dfrac{1}{h_c}=\dfrac{1}{6}:\dfrac{1}{4}:\dfrac{1}{3}=2:3:4$

$\therefore\ \cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{7}{8}$

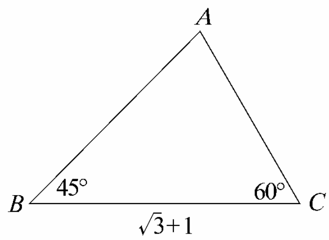
(2)在直角△BCH中，$h_b=\overline{BH}=a\cdot\sin C$

$\because\ \cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=-\dfrac{1}{4} \Rightarrow \sin C=\dfrac{\sqrt{15}}{4}\quad\therefore\ 4=a\cdot\dfrac{\sqrt{15}}{4} \Rightarrow a=\dfrac{16}{\sqrt{15}}$

(3)$\dfrac{a}{\sin A}=2R\quad\because\ \cos A=\dfrac{7}{8} \Rightarrow \sin A=\dfrac{\sqrt{15}}{8}\quad\therefore\ R=\dfrac{a}{2\sin A}=\dfrac{64}{15}$

13.△ABC中，$\angle B=45°$，$\angle C=60°$，$a=\sqrt{3}+1$，求 $\overline{AB}$ 的值 = ＿＿＿＿＿＿ ，外接圓半徑 = 。

答案：$\sqrt{6}$ ，$\sqrt{2}$



解析：　$\angle B=45°$，$\angle C=60°\ \Rightarrow\ \angle A=75°$

由正弦定理知$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}\ \Rightarrow$

$$c=\frac{a\sin C}{\sin A}=\frac{(\sqrt{3}+1)\sin 60°}{\sin 75°}=\frac{(\sqrt{3}+1)\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}=\sqrt{6}$$

又 $2R=\dfrac{c}{\sin C}\ \Rightarrow\ R=\dfrac{c}{2\sin C}=\dfrac{\sqrt{6}}{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}=\sqrt{2}$

14.若△ABC的三內角$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$滿足$\sin A=2\sin C\cos B$，則△ABC的形狀爲＿＿＿三角形。

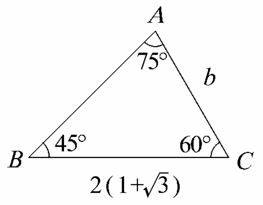
答案：等腰

解析：由正弦定理知$\sin A=\dfrac{a}{2R}$，$\sin C=\dfrac{c}{2R}$，由餘弦定理知$\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$

$\sin A=2\sin C\cos B \Rightarrow \dfrac{a}{2R}=2\cdot\dfrac{c}{2R}\cdot\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$

$\Rightarrow a^2=a^2+c^2-b^2 \Rightarrow c^2=b^2$ $\therefore c=b$故△ABC為等腰三角形

15.$\angle B=45°$，$\angle C=60°$，$a=2(1+\sqrt{3})$，求△ABC的面積__________。



答案：$2(3+\sqrt{3})$

解析：

由正弦定理知：$\dfrac{2(1+\sqrt{3})}{\sin 75°}=\dfrac{b}{\sin 45°} \Rightarrow \dfrac{2(1+\sqrt{3})}{\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}=\dfrac{b}{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$

$\Rightarrow b=4$ $\therefore$ △ABC 之面積$=\dfrac{1}{2}\times 4\times 2(1+\sqrt{3})\times\sin 60°=2(3+\sqrt{3})$

16.△ABC中，$\overline{AB}=\sqrt{3}$，$\overline{AC}=1$，$\angle B=30°$，且△ABC不是直角三角形，則(1) $\overline{BC}=$______。(2) $\angle C=$__________。

答案：(1) 1 (2) 120°

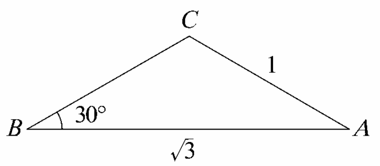
解析：(1)由餘弦定理知$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$

$\Rightarrow 1^2=a^2+(\sqrt{3})^2-2a\cdot\sqrt{3}\cos 30° \Rightarrow a^2-3a+2=0 \Rightarrow a=1$ 或 2

$\because$ △ABC不是直角三角形 $\therefore a=1$

(2)△ABC中 $\because \overline{AC}=\overline{BC}=1$ $\therefore \angle A=\angle B=30°$

$\therefore \angle C=180°-30°-30°=120°$



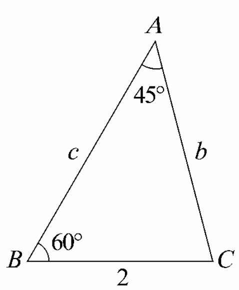
17.△ABC中，$\angle A=45°$，$\angle B=60°$，$\overline{BC}=2$，則(1) $\overline{AB}=$__________。 (2) $\overline{AC}=$__________。

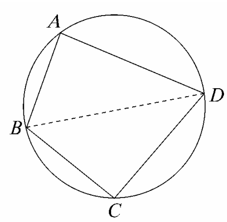
答案：(1) $\sqrt{3}+1$ (2) $\sqrt{6}$

解析：(1)$\angle C=180°-45°-60°=75°$

由正弦定理$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C} \Rightarrow \dfrac{2}{\sin 45°}=\dfrac{c}{\sin 75°} \Rightarrow c=\sqrt{3}+1$

(2)由正弦定理$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B} \Rightarrow \dfrac{2}{\sin 45°}=\dfrac{b}{\sin 60°} \Rightarrow b=\sqrt{6}$





18.圓內接四邊形中，$\overline{AB}=1$，$\overline{BC}=2$，$\overline{CD}=3$，$\overline{DA}=4$，則$\overline{BD}$的長為

______________。

答案：$\sqrt{\dfrac{77}{5}}$

解析：

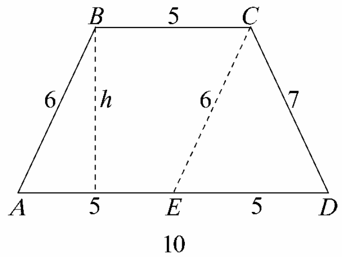
如上圖，$\angle A+\angle C=180°$

(1)在△ABD中，$\overline{BD}^2=\overline{AB}^2+\overline{AD}^2-2\overline{AB}\cdot\overline{AD}\cos A \quad\Rightarrow\quad \overline{BD}^2=1+16-2\times1\times4\cos A$

(2)在△BCD中，

$\overline{BD}^2=\overline{BC}^2+\overline{CD}^2-2\overline{BC}\cdot\overline{CD}\cos(180°-A) \quad\Rightarrow\quad \overline{BD}^2=4+9-2\times2\times3(-\cos A)$

(3)由(1)(2)消去$\cos A \quad\Rightarrow\quad \overline{BD}^2=\dfrac{77}{5} \quad\Rightarrow\quad \overline{BD}=\sqrt{\dfrac{77}{5}}$



19.梯形$ABCD$上底$\overline{BC}=5$，下底$\overline{AD}=10$，兩腰$\overline{AB}=6$，$\overline{CD}=7$，則$\cos A=$______________，而梯形$ABCD$的面積爲______________。

答案：$\dfrac{1}{5}$；$18\sqrt{6}$

解析：

如上圖：過 C 作 $\overline{AB}$ 之平行線交 $\overline{AD}$ 於 E，則$\overline{CE}=6$，$\overline{DE}=10-5=5$，$\angle CED=\angle A$

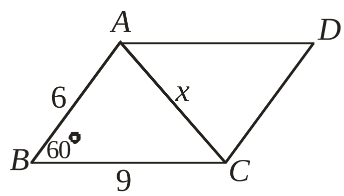
在△CED 中，由餘弦定理 $\cos A=\cos\angle CED=\dfrac{25+36-49}{2\cdot5\cdot6}=\dfrac{1}{5}\Rightarrow \sin A=\dfrac{\sqrt{24}}{5}$

$\Rightarrow$　梯形 $ABCD$ 之高 $h=\overline{AB}\sin A=6\cdot\dfrac{2\sqrt{6}}{5}=\dfrac{12\sqrt{6}}{5}$

$\Rightarrow$　面積 $=\dfrac{1}{2}(5+10)\cdot h=\dfrac{15}{2}\cdot\dfrac{12\sqrt{6}}{5}=18\sqrt{6}$

20.平行四邊形$ABCD$中，$\overline{AB}=6$，$\overline{BC}=9$，$\angle ABC=60°$，則兩對角線

(1) $\overline{AC}=$______________。　(2) $\overline{BD}=$______________。



答案：(1) $3\sqrt{7}$　(2) $3\sqrt{19}$

解析：

餘弦定理 $x^2=6^2+9^2-2\cdot6\cdot9\cdot\cos60°\Rightarrow x=3\sqrt{7}$

平行四邊形定理：$\overline{AC}^2+\overline{BD}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CD}^2+\overline{AD}^2$

$(3\sqrt{7})^2+\overline{BD}^2=6^2+9^2+6^2+9^2\Rightarrow\overline{BD}=3\sqrt{19}$

21.△ABC中，若$(a+b+c)(b+c-a)=3bc$，則

(1) $\cos A=$______________。　(2) $\angle A=$______________。

答案：(1)$\dfrac{1}{2}$　(2) $60°$

22.△ABC中，$\overline{BC}=a$，$\overline{CA}=b$，$\overline{AB}=c$，已知ab∶bc∶$ca=2$∶3∶4，試求：

(1) $\sin A$∶$\sin B$∶$\sin C=$______________。　(2) $\cos A=$______________。

答案：(1) 4∶3∶6　(2)$\dfrac{29}{36}$

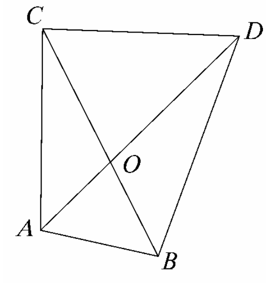
解析：(1)已知 ab∶bc∶$ca=2$∶3∶4 且 $abc\neq0$

$\therefore\quad \dfrac{ab}{abc}:\dfrac{bc}{abc}:\dfrac{ca}{abc}=2:3:4 \quad\Rightarrow\quad \dfrac{1}{c}:\dfrac{1}{a}:\dfrac{1}{b}=2:3:4$

$\Rightarrow\quad a:b:c=\dfrac{1}{3}:\dfrac{1}{4}:\dfrac{1}{2}=4:3:6\quad\Rightarrow\quad \sin A:\sin B:\sin C=4:3:6$

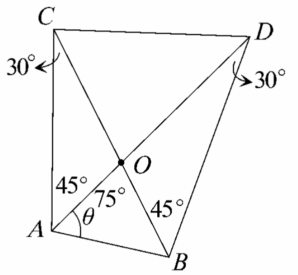
(2)令 $a=4k$，$b=3k$，$c=6k$，則 $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{(3k)^2+(6k)^2-(4k)^2}{2\cdot 3k\cdot 6k}=\dfrac{29k^2}{36k^2}=\dfrac{29}{36}$

23.如圖，$\angle CAD=\angle CBD=45°$，$\overline{AB}=6$，$\overline{AD}$，$\overline{BC}$ 交於O，$\angle AOB=75°$，則$\overline{CD}=$ ＿＿＿＿＿。



答案：$6\sqrt{2}$

解析：設$\angle DAB=\theta$



(1)△ABC中，$\dfrac{6}{\sin 30°}=\dfrac{\overline{BC}}{\sin(\theta+45°)}$，得$\overline{BC}=12\sin(\theta+45°)$

(2)△ABD中，$\dfrac{6}{\sin 30°}=\dfrac{\overline{BD}}{\sin\theta}$，得$\overline{BD}=12\sin\theta$

(3)△BCD中，利用餘弦定理知$\overline{CD}^2=\overline{BC}^2+\overline{BD}^2-2\,\overline{BC}\cdot\overline{BD}\cdot\cos 45°$

$=12^2\sin^2(\theta+45°)+12^2\sin^2\theta-2\cdot 12\sin(\theta+45°)\cdot 12\sin\theta\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$=12^2[(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta)^2+\sin^2\theta-\sqrt{2}(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta)\cdot\sin\theta]$

$=12^2(\dfrac{1}{2}+\sin\theta\cos\theta+\sin^2\theta-\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta)=12^2\times\dfrac{1}{2}=72$

$\therefore\quad \overline{CD}=\sqrt{72}=6\sqrt{2}$

24.設△ABC之三邊長分別爲 $\overline{AB}=8$，$\overline{BC}=5$，$\overline{AC}=7$，則

(1)△ABC最小內角之餘弦的函數值爲＿＿＿＿＿。

(2) $\sin A:\sin B:\sin C=$ ＿＿＿＿＿。

(3)△ABC的面積 $=$ ＿＿＿＿＿。

(4)△ABC的外接圓半徑爲＿＿＿＿＿。

(5)△ABC的內切圓半徑爲＿＿＿＿＿。

(6) $\overline{BC}$ 邊上的中線長 $=$ ＿＿＿＿＿。

(7)設$\angle B$的內角平分線交 $\overline{AC}$ 邊於D點，則$\overline{BD}$之長爲＿＿＿＿＿。

答案：(1) $\frac{11}{14}$　(2) 5：7：8　(3) $10\sqrt{3}$　(4) $\frac{7}{3}\sqrt{3}$　(5) $\sqrt{3}$　(6) $\frac{\sqrt{201}}{2}$　(7) $\frac{40}{13}\sqrt{3}$

解析：(1)$\angle A$爲最小內角，利用餘弦定理$\cos A=\frac{7^2+8^2-5^2}{2\cdot 7\cdot 8}=\frac{11}{14}$

(2)由正弦定理$\sin A$：$\sin B$：$\sin C=5$：7：8

(3)利用海龍公式$s=\frac{1}{2}(5+7+8)=10$

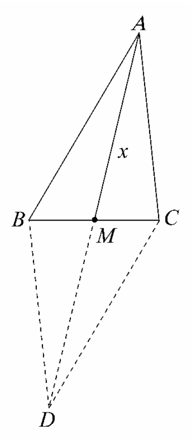
$\triangle=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=\sqrt{10(10-5)(10-7)(10-8)}=10\sqrt{3}$

(4)由$\triangle=\frac{abc}{4R}$　$\Rightarrow$　外接圓半徑$R=\frac{abc}{4\triangle}=\frac{5\times 7\times 8}{4\times 10\sqrt{3}}=\frac{7}{3}\sqrt{3}$

(5)由$\triangle=rs$　$\Rightarrow$　內切圓半徑$r=\frac{\triangle}{s}=\frac{10\sqrt{3}}{10}=\sqrt{3}$

(6)延長$\overrightarrow{AM}$使得$\overline{MD}=\overline{AM}$，則$ABDC$爲一平行四邊形

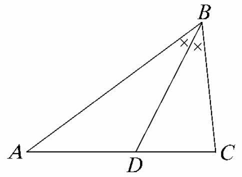
由平行四邊形定理$(2x)^2+5^2=2(7^2+8^2)$，得中線長$\overline{AM}=x=\frac{\sqrt{201}}{2}$



(7)$\because$　$\overline{BD}$爲內角平分線　$\therefore$　$\frac{\overline{AD}}{\overline{CD}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{CB}}=\frac{8}{5}$　$\Rightarrow$　$\overline{AD}=\frac{8}{13}\overline{AC}=\frac{8}{13}\times 7=\frac{56}{13}$

於$\triangle BAD$及$\triangle BAC$中，利用餘弦定理，$\cos A=\dfrac{8^2+(\frac{56}{13})^2-\overline{BD}^2}{2\cdot 8\cdot \frac{56}{13}}=\dfrac{8^2+7^2-5^2}{2\cdot 8\cdot 7}$　$\Rightarrow$

$\overline{BD}=\frac{40}{13}\sqrt{3}$



25.在$\triangle ABC$中，$(a+b)$：$(b+c)$：$(c+a)=x$：$(x+1)$：$(x+2)$，$x>0$，且$\angle ACB=120°$，則x之值爲__________。

答案：4

解析：

(1)

$$\begin{aligned} \text{令}\ & a+b=xk \\ & b+c=(x+1)k \\ +)\ & c+a=(x+2)k \\ \hline & a+b+c=\frac{3}{2}(x+1)k \end{aligned}$$

(2)$\because$ $c=(\frac{1}{2}x+\frac{3}{2})k$，$a=(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2})k$，$b=(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2})k$

$\therefore$ $a:b:c=(x+1):(x-1):(x+3)$

(3) $\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{(x+1)^2+(x-1)^2-(x+3)^2}{2(x+1)(x-1)}=\dfrac{x^2-6x-7}{2(x^2-1)}=\cos 120°=-\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow$ $2(x^2-1)=-2(x^2-6x-7)$ $\Rightarrow$ $x=4$ 或 $x=-1$（不合 $\because$ $x>0$）

26.a，b，c爲△ABC三邊長，若 $2a-b-c=0$ 且 $a-4b+2c=0$，求

(1) $\sin A:\sin B:\sin C=$ __________。(2)$\cos A:\cos B:\cos C=$ __________。

答案：(1) 6：5：7 (2)19：25：7

解析：

(1) $\begin{cases} 2a-b-c=0 \\ a-4b+2c=0 \end{cases}$

$\Rightarrow$ $a:b:c=\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -4 & 2 \end{vmatrix}:\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}:\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix}=(-6):(-5):(-7)=6:5:7$

$\sin A:\sin B:\sin C=6:5:7$

(2)設 $a=6k$，$b=5k$，$c=7k$ $\therefore$ $\cos A:\cos B:\cos C$

$$=\frac{(5k)^2+(7k)^2-(6k)^2}{2(5k)(7k)}:\frac{(6k)^2+(7k)^2-(5k)^2}{2(6k)(7k)}:\frac{(6k)^2+(5k)^2-(7k)^2}{2(6k)(5k)}$$

$$=\frac{38}{5\times 7}:\frac{60}{6\times 7}:\frac{12}{6\times 5}=19:25:7$$

27.已知圓內接四邊形$ABCD$，$\overline{AD}=\overline{BC}=3$，$\overline{CD}=5$，$\overline{DA}=8$，則$\overline{BD}=$ __________。

答案：7

解析：

利用餘弦定理，則

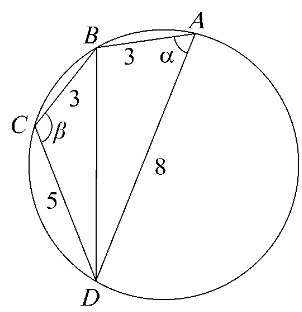
$$\begin{cases} \overline{BD}^2=8^2+3^2-2\times 8\times 3\times\cos\alpha \cdots\cdots ① \\ \overline{BD}^2=8^2+3^2-2\times 8\times 3\times\cos\beta \cdots\cdots ② \end{cases}$$

① = ② $\Rightarrow$ $64-48\cos\alpha=25-30\cos\beta$

$64-48\cos\alpha=25-30(-\cos\alpha)$（$\because$ $\alpha+\beta=\pi$）

$64-48\cos\alpha=25+30\cos\alpha$ $\Rightarrow$ $\cos\alpha=\dfrac{1}{2}$ 代入①

$\overline{BD}^2=8^2+3^2-2\times 8\times 3\times\dfrac{1}{2}=49$ $\therefore$ $\overline{BD}=7$



28.$\triangle ABC$ 中，$\overline{AB}=c$，$\overline{BC}=a$，$\overline{CA}=b$，$s=\dfrac{a+b+c}{2}$，證明：

$\triangle ABC$ 面積$=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$（Heron's Formula）。

【證明】

$(\triangle ABC)^2=(\dfrac{1}{2}bc\sin A)^2=\dfrac{1}{4}b^2c^2(1-\cos^2 A)=\dfrac{1}{4}b^2c^2[1-\dfrac{(b^2+c^2-a^2)^2}{4b^2c^2}]$

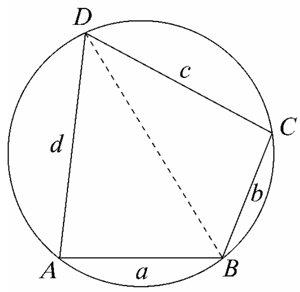
$=\dfrac{1}{16}[(2bc)^2-(b^2+c^2-a^2)^2]=\dfrac{1}{16}[(2bc+b^2+c^2-a^2)(2bc-b^2-c^2+a^2)]$

$=\dfrac{1}{16}[(b+c)^2-a^2][a^2-(b-c)^2]=\dfrac{1}{16}(b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)$

$=\dfrac{1}{16}(2s)(2s-2a)(2s-2c)(2s-2b)=s(s-a)(s-b)(s-c)$

$\therefore\quad \triangle ABC=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

29.圓內接四邊形$ABCD$的面積爲△，四邊長分別爲$\overline{AB}=a$，$\overline{BC}=b$，$\overline{CD}=c$，$\overline{DA}=d$，且$s=\dfrac{1}{2}(a+b+c+d)$。試證明下列等式成立：



(1)$\triangle=\dfrac{1}{2}(ad+bc)\sin A$。

(2) $a^2+d^2-b^2-c^2=2(ad+bc)\cos A$。

(3)$\triangle=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$ 。

【證明】

(1)因爲□$ABCD$爲圓內接四邊形，故$\angle A+\angle C=180°$

亦即可得$\sin A=\sin C$，$\cos A=-\cos C$

所以□$ABCD$面積爲$\triangle=\triangle ABD+\triangle BCD=\dfrac{1}{2}ad\sin A+\dfrac{1}{2}bc\sin C$

$=\dfrac{1}{2}ad\sin A+\dfrac{1}{2}bc\sin(180°-A)=\dfrac{1}{2}(ad+bc)\sin A$

(2)在$\triangle ABD$，$\triangle BCD$中，由餘弦定理知

$a^2+d^2-2ad\cos A=\overline{BD}^2=b^2+c^2-2bc\cos C$

$\therefore\quad a^2+d^2-2ad\cos A=b^2+c^2+2bc\cos A \quad \therefore\quad a^2+d^2-b^2-c^2=2(ad+bc)\cos A$

(3)由(1)得$\triangle^2=\dfrac{1}{4}(ad+bc)^2\sin^2 A=\dfrac{1}{4}(ad+bc)^2(1-\cos^2 A)\cdots\cdots①$

由(2)得$\cos A=\dfrac{a^2+d^2-b^2-c^2}{2(ad+bc)}\cdots\cdots②$，將②代入①，得

$\triangle^2=\dfrac{1}{4}(ad+bc)^2[1-\dfrac{(a^2+d^2-b^2-c^2)^2}{4(ad+bc)^2}]=\dfrac{1}{16}[4(ad+bc)^2-(a^2+d^2-b^2-c^2)^2]$

$=\dfrac{1}{16}[2(ad+bc)+(a^2+d^2-b^2-c^2)][2(ad+bc)-(a^2+d^2-b^2-c^2)]$

$=\dfrac{1}{16}[(a+d)^2-(b-c)^2][(b+c)^2-(a-d)^2]$

$=\dfrac{1}{16}(a+d-b+c)(a+d+b-c)(b+c-a+d)(b+c+a-d)$

因爲$a+d-b+c=a+b+c+d-2b=2s-2b=2(s-b)$，同理$a+d+b-c=2(s-c)$

$b+c-a+d=2(s-a)$，$b+c+a-d=2(s-d)$，將上式代入$\triangle^2$中，得

$\triangle^2=\dfrac{1}{16}\cdot 2(s-b)\cdot 2(s-c)\cdot 2(s-a)\cdot 2(s-d)=(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)$

故得$\triangle=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$

30.$\triangle ABC$中，$\overline{AB}$邊上的高$h_c=3$，$\overline{BC}$邊上的高$h_a=6$，$\overline{CA}$邊上的高$h_b=4$，求(1) $\overline{AB}$的長。
(2)$\triangle ABC$面積。

答案：(1) $\dfrac{32\sqrt{15}}{15}$　(2) $\dfrac{16}{5}\sqrt{15}$

解析：

(1) $a:b:c=\dfrac{1}{h_a}:\dfrac{1}{h_b}:\dfrac{1}{h_c}=\dfrac{1}{6}:\dfrac{1}{4}:\dfrac{1}{3}=2:3:4$

(2)令$a=2t$，$b=3t$，$c=4t$，而$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=-\dfrac{1}{4}$　$\Rightarrow$　$\sin C=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$

$\therefore$　$\triangle ABC=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}bh_b$，$a\sin C=h_b=4$　$\therefore$　$a=\dfrac{4}{\sin C}=\dfrac{16}{\sqrt{15}}=\dfrac{32\sqrt{15}}{15}$

(3) $\overline{AB}=c=2a=\dfrac{32}{\sqrt{15}}=\dfrac{32\sqrt{15}}{15}$，$\triangle ABC=\dfrac{1}{2}bh_b=\dfrac{1}{2}(\dfrac{3}{2}a)\cdot 4=\dfrac{16}{5}\sqrt{15}$