高雄市明誠中學 高一數學平時測驗 日期：93.04.29					
範圍	2-4 廣意角+Ans	班級		姓名	
		座號			

一. 單選題(每題 10 分)

1. θ 不是象限角且 $\tan\theta > 0$，$\sec\theta < 0$，則點 $P(\cos\theta，\sin\theta)$在

   (A)第一象限 (B)第二象限 (C)第三象限 (D)第四象限 (E)兩坐標軸上

答案：(C)

解析：(1) $\tan\theta > 0$，$\sec\theta < 0 \Rightarrow \theta$ 在第三象限

(2)$\therefore \sin\theta < 0$，$\cos\theta < 0 \Rightarrow$ 點 $P(\cos\theta，\sin\theta)$在第三象限

2. 下列何者無意義？(複選)

   (a) tan540° (B) cot180° (C) cot0° (D) sec180° (E) csc1080°

答案：(B)(C)(E)

解析：(1) 540°與 180°同界，1080°與 0°同界

(2) $\tan\theta$，$\sec\theta$ 在 $\theta = 90°$，270°時不存在，$\cot\theta$，$\csc\theta$ 在 $\theta = 0°$，180°時不存在

(3)$\therefore$ cot180°，cot0°，csc1080°不存在（無意義）

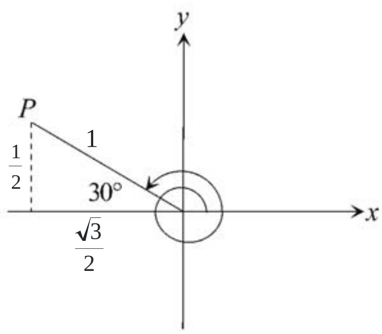
二、填充題(每題 10 分)

3. 在坐標平面上，始邊爲正向x軸，設P點在有向角 510°的終邊上，且P點距離原點 1 單位，求P點坐標爲__________。

答案：$(-\frac{\sqrt{3}}{2}，\frac{1}{2})$

解析：

$\because$ $510° = 360° + 150°$ $\therefore$ P 點爲第二象限角，且距離原點 1 單位，



$\therefore$ P 點坐標$(-\cos30°，\sin30°) = (-\frac{\sqrt{3}}{2}，\frac{1}{2})$

4. 若 $270° < \theta < 360°$且 $6\sin^2\theta - \sin\theta = 1$，則$\tan\theta =$ __________。

答案：$-\frac{\sqrt{2}}{4}$

解析：$6\sin^2\theta - \sin\theta - 1 = 0 \Rightarrow (3\sin\theta + 1)(2\sin\theta - 1) = 0 \Rightarrow \sin\theta = -\frac{1}{3}$或$\frac{1}{2}$（不合）

$\Rightarrow \tan\theta = -\frac{\sqrt{2}}{4}$

5. 試求$\cos 1770° \tan 1110° + \sin(-1560°)\cot 510° =$__________。

答案：2

解析：原式$=\cos(90°\times 19+60°)\cdot\tan(90°\times 12+30°)-\sin(90°\times 17+30°)\cdot\cot(90°\times 5+60°)$

$$= \sin 30° \cdot \tan 30° - \cos 30° \cdot (-\tan 60°) = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot(-\sqrt{3}) = 2$$

6. (1)求 1395°的最小正同界角 ＝__________。 (2)求$\sin 1395° =$__________。

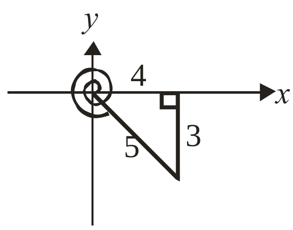
答案：(1) 315° (2) $\frac{-\sqrt{2}}{2}$

解析：(1) $1395° = 360° \times 3 + 315°$ ∴ 最小正同界角爲 315°

(2) $\sin 1395° = \sin(90°\times 15+45°) = -\cos 45° = \frac{-\sqrt{2}}{2}$

7. 設θ爲一個第四象限角，$\tan\theta=-\frac{3}{4}$，求$\frac{1+\sin\theta}{1-\cos\theta}$ ＝__________。

答案：2



解析：θ在第四象限，且$\tan\theta=-\frac{3}{4}$ $\Rightarrow$ $\sin\theta=\frac{-3}{5}$，$\cos\theta=\frac{4}{5}$

$$\frac{1+\sin\theta}{1-\cos\theta} = \frac{1+(\frac{-3}{5})}{1-\frac{4}{5}} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{1}{5}} = 2$$

8. $x\in R$，$\sin x+\cos x=\frac{5}{4}$，則$\cos x\cdot\sin x=$__________，$\sin x-\cos x=$__________。

答案：$\frac{9}{32}$，$\pm\frac{\sqrt{7}}{4}$

解析：將$\sin x+\cos x=\frac{5}{4}$平方

$$\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x=\frac{25}{16} \Rightarrow 1+2\sin x\cos x=\frac{25}{16} \Rightarrow \sin x\cos x=\frac{9}{32}$$

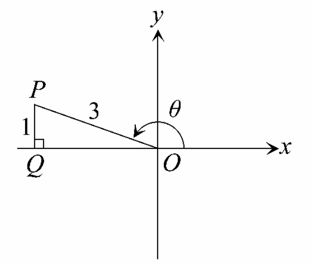
$$(\sin x-\cos x)^2=\sin^2 x-2\sin x\cos x+\cos^2 x=1-2\times\frac{9}{32}=\frac{7}{16}$$

$\because$ $x\in R$ $\therefore$ $\sin x-\cos x=\pm\frac{\sqrt{7}}{4}$

9. 設$\sin\theta=\frac{1}{3}$，$90°<\theta<180°$，則：

(1) $\cos\theta=$__________。 (2) $\tan(-630°+\theta)=$__________。

答案：(1) $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$ (2) $2\sqrt{2}$



解析：

(1)如圖所示，令 $\overline{PO}=3$， $\overline{PQ}=1$，則 $\overline{OQ}=\sqrt{3^2-1^2}=2\sqrt{2}$

$\because\quad 90°<\theta<180° \quad \therefore\quad \cos\theta=-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

(2) $\tan(-630°+\theta)=-\tan(630°-\theta)=-\cot\theta=-(-2\sqrt{2})=2\sqrt{2}$

10.$(\log_2\sin855°)^2+\log_3\tan(-510°)$之值為__________。

答案：$-\dfrac{1}{4}$

解析：

$$\sin 855°=\sin(90°\times 9+45°)=\cos 45°=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\tan(-510°)=-\tan 510°=-\tan(90°\times 5+60°)=\cot 60°=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

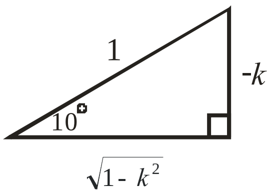
$(\log_2\sin855°)^2+\log_3\tan(-510°)$

$$=(\log_2\frac{1}{\sqrt{2}})^2+\log_3\frac{1}{\sqrt{3}}=(\log_2 2^{-\frac{1}{2}})^2+\log_3 3^{-\frac{1}{2}}=(-\frac{1}{2})^2+(-\frac{1}{2})=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}$$

11.設$\cos(-100°)=k$，以k表出：(1) $\tan(-80°)=$__________。 (2) $\csc 1360°=$__________。

答案：(1) $\dfrac{\sqrt{1-k^2}}{k}$ (2) $\dfrac{-1}{\sqrt{1-k^2}}$

解析：(1) $\cos(-100°)=k \Rightarrow \cos 100°=k$



$$\Rightarrow\quad -\sin10°=k\Rightarrow\quad \sin10°=-k\Rightarrow\sin10°=\frac{-k}{1}\Rightarrow$$

$$\therefore\quad \tan(-80°)=-\tan 80°=-\frac{\sqrt{1-k^2}}{-k}$$

(2) $\csc 1360°=\csc(90°\times15+10°)=-\sec10°=-\dfrac{1}{\sqrt{1-k^2}}$

12.求下列各值：

(1) $\sin120°\cos150°-\cos225°\sin315°=$__________。

(2) $\sin1080°+\cos180°+\tan180°+\cot810°+\sec720°+\csc90°=$__________。

答案：(1) $-\dfrac{5}{4}$ (2) 1

解析：(1)原式 $=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times(-\dfrac{\sqrt{3}}{2})-(-\dfrac{\sqrt{2}}{2})\times(-\dfrac{\sqrt{2}}{2})=-\dfrac{5}{4}$

(2)原式 $=0+(-1)+0+0+1+1=1$

13.$\cos20°+\cos40°+\cos60°+\cos80°+\cos100°+\cdots+\cos300°+\cos320°+\cos340°$之值為__

。

答案：-1

解析：(1)$\because\ \cos20° + \cos200° = \cos20° + \cos(90°\times2+20°) = \cos20° - \cos20° = 0$

$\cos40° + \cos220° = \cos40° + \cos(180° + 40°) = \cos40° - \cos40° = 0$

$\cdots\cos160° + \cos340° = \cos160° - \cos160° = 0$

(2)原式 $= (\cos20° + \cos200°) + (\cos40° + \cos220°) + (\cos60° + \cos240°) + (\cos80° + \cos260°)$

$+ (\cos100° + \cos280°) + (\cos120° + \cos300°) + (\cos140° + \cos320°) +$

$(\cos160° + \cos340°) + \cos180° = 0 + \cos180° = -1$

14.設$a = \dfrac{\sin(180°-\theta)\ \cdot\ \tan^2(360°-\theta)}{\cos(270°+\theta)} - \dfrac{\cos(90°-\theta)\cdot\csc^2(270°-\theta)}{\sin(540°-\theta)}$，則$a =$ ______ 。

答案：-1

解析：$a = \dfrac{\sin\theta\cdot\tan^2\theta}{\sin\theta} - \dfrac{\sin\theta\cdot\sec^2\theta}{\sin\theta} = \tan^2\theta - \sec^2\theta = -1$

15.設$P(-5\sqrt{3}$ ，$y)$ 在有向角θ的終邊上，若$\tan\theta = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ ，則$y =$ ________ ，而$\csc\theta =$ ______ 。

答案：-10； $-\dfrac{\sqrt{7}}{2}$

解析：

$P(-5\sqrt{3}$ ，$y)\quad\Rightarrow\quad\tan\theta = \dfrac{y}{-5\sqrt{3}} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\quad\Rightarrow\quad y = -10$

又 $r = \overline{OP} = \sqrt{(-5\sqrt{3})^2 + (-10)^2} = 5\sqrt{7}\quad\therefore\quad\csc\theta = = \dfrac{r}{x} = \dfrac{5\sqrt{7}}{-10} = -\dfrac{\sqrt{7}}{2}$

16.設$S = \{\theta_n \mid \theta_n = 45°\times n$，$n\in Z$，$1\le n\le 100\}$，則$S$中有__________個角爲第二象限角。

答案：13

解析：

令 $90° + 360°\times t < \theta_n = 45°\times n < 180° + 360°\times t$，$t\in Z\quad\therefore\quad 2 + 8t < n < 4 + 8t$，$t\in Z$

故$n = 8t + 3$，$t\in Z$，又 $1\le n = 8t + 3\le 100\quad\Rightarrow\quad -2\le 8t\le 97\quad\Rightarrow\quad -\dfrac{1}{4}\le t\le\dfrac{97}{8}$ ，$t\in Z$

$\therefore\quad t = 0$，1，2，…，12 共 13 個 $\quad\therefore\quad S$中有 13 個角爲第二象限角

17.已知$\cos69°20' = 0.3529$，$\cos69°30' = 0.3502$，則$\cos(-290°38')$之近似值爲__________。

（取到小數點後第四位）

答案：0.3524

解析：$\cos(-290°38') = \cos290°38' = \cos(90°\times4 - 69°20') = \cos69°22'$

由內插法

θ	$\sin\theta$
69°20'	0.3529
69°22′	y
69°30′	0.0.3502

$\dfrac{2}{10}=\dfrac{a}{-0.0027}$ $\Rightarrow a=-0.00054$ $\Rightarrow$ $\cos 69°22'=y=0.3529-0.00054 \doteq 0.3524$

18.設 $90°<\theta<180°$，$\cos\theta=-0.4900$，又已知$\sin 29.3°=0.4893$，$\sin 29.4°=0.4909$，則可知θ的度數為__________。（以四捨五入法算到度為止）

答案：$119°(20.625)'$

解析：設 $\sin x=0.4900$

$$0.1\left[\begin{array}{l} x-29.3\left[\begin{array}{l}\sin 29.3°=0.4893 \\ \sin x \quad =0.4900\end{array}\right] 0.0007 \\ \sin 29.4°=0.4909 \end{array}\right] 0.0016$$

由內插法知$\dfrac{a}{0.1}=\dfrac{0.0007}{0.0016}$ $\Rightarrow a=0.04375 \Rightarrow x=29.3+0.04375=29.34375$

$\therefore$ $\cos\theta=-\sin 29.34375°=-\cos 60.65625°=-\cos(180°-119.34375°)=\cos 119.34375°$

$\therefore$ $\theta=119.34375°=119°\,(20.625)'$

19.設 $90°<\theta<135°$，則$\sqrt{1+2\sin\theta\cos\theta}-\sqrt{1-2\sin\theta\cos\theta}$ $=$__________。

答案：$2\cos\theta$

解析：$90°<\theta<135°$ $\therefore$ $\cos\theta<\sin\theta$ 且 $\sin\theta+\cos\theta>0$

$\sqrt{1+2\sin\theta\cos\theta}-\sqrt{1-2\sin\theta\cos\theta}$ $=\sqrt{(\sin\theta+\cos\theta)^2}-\sqrt{(\sin\theta-\cos\theta)^2}$

$=\sin\theta+\cos\theta-\sin\theta+\cos\theta=2\cos\theta$

20.設 $0°\le\theta\le 180°$，則$y=\dfrac{5\cos\theta+7}{5\cos\theta-7}$之範圍為__________。

答案：$-6\le y\le -\dfrac{1}{6}$

解析：$y=\dfrac{5\cos\theta+7}{5\cos\theta-7}$ $=1+\dfrac{14}{5\cos\theta-7}$ $\because$ $-1\le\cos\theta\le 1$ $\Rightarrow$ $-12\le 5\sin\theta-7\le -2$

$\Rightarrow$ $-\dfrac{1}{2}\le\dfrac{1}{5\cos\theta-7}\le-\dfrac{1}{12}\Rightarrow$ $-7\le\dfrac{14}{5\cos\theta-7}\le-\dfrac{7}{6}$ $\Rightarrow$ $-6\le 1+\dfrac{14}{5\cos\theta-7}\le-\dfrac{1}{6}$

21.設 $0°<\theta<90°$，若 $2x^3+(2-\sqrt{3})x^2+(2-\sqrt{3})x$除以$x-\sin\theta$得餘式$\sqrt{3}$，則$\log_3\tan\theta=$_____。

答案：$\dfrac{1}{2}$

解析：$2\sin^3\theta+(2-\sqrt{3})\sin^2\theta+(2-\sqrt{3})\sin\theta=\sqrt{3}\Rightarrow$ $(2\sin\theta-\sqrt{3})(\sin^2\theta+\sin\theta+1)=0$

$\Rightarrow$ $\sin\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\therefore$ $\tan\theta=\sqrt{3}$ $\therefore$ $\log_3\tan\theta=\log_3\sqrt{3}$ $=\dfrac{1}{2}$

22.求 $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{2})^n \cdot \sin(n \cdot 90°)$之值________________。

答案：$\frac{2}{5}$

解析：$\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{2})^n \cdot \sin(n \cdot 90°)$

$= (\frac{1}{2})\sin 90° + (\frac{1}{2})^2 \cdot \sin 180° + (\frac{1}{2})^3\sin 270° + (\frac{1}{2})^4\sin 360° + (\frac{1}{2})^5\sin 90° + (\frac{1}{2})^6\sin 180° +$
$(\frac{1}{2})^7\sin 270° + (\frac{1}{2})^8\sin 360° + (\frac{1}{2})^9 \cdot \sin 90° + (\frac{1}{2})^{10}\sin 180° + (\frac{1}{2})^{11}\sin 270° + (\frac{1}{2})^{12}\sin 360°$

$+ \cdots = [\frac{1}{2} + (\frac{1}{2})^5 + (\frac{1}{2})^9 + \cdots] - [(\frac{1}{2})^3 + (\frac{1}{2})^7 + (\frac{1}{2})^{11} + \cdots] = \frac{\frac{1}{2}}{1-(\frac{1}{2})^4} - \frac{(\frac{1}{2})^3}{1-(\frac{1}{2})^4} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$

23.求 $y = \frac{6}{\sin^2\theta - \sin\theta + 1}$ 的最大值，最小值__________ ; __________。

答案：最大值為 8，最小值為 2

解析：(1) $-1 \le \sin\theta \le 1$

(2) $k = \sin^2\theta - \sin\theta + 1 = (\sin\theta - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$ $\because$ $-\frac{3}{2} \le \sin\theta - \frac{1}{2} \le \frac{1}{2}$，$0 \le (\sin\theta - \frac{1}{2})^2 \le \frac{9}{4}$

$\therefore$ $\frac{3}{4} \le k \le 3$ $\Rightarrow$ $\frac{4}{3} \ge \frac{1}{k} \ge \frac{1}{3}$ $\Rightarrow$ $8 \ge \frac{6}{k} \ge 2$ $\Rightarrow$ $2 \le y \le 8$

(3).$\therefore$ y的最大值為 8，最小值為 2