高雄市明誠中學 高一數學平時測驗 日期：93.04.22					
範圍	2-3 測量、三角函數數值表+Ans	班級		姓名	
		座號			

一. 單選題(每題 10 分)

1. 已知 $\sin 36° = 0.5878$，$\sin 36°10' = 0.5901$，則下列何者與 $\sin 36°08'$之值最接近？

(A) 0.5893 (B) 0.5894 (C) 0.5895 (D) 0.5896 (E) 0.5897

答案：(D)

解析：利用內插法

θ	$\sin\theta$
36°	0.5878
36°08′	y
36°10′	0.5901

$\Rightarrow \quad \dfrac{8}{10} = \dfrac{a}{0.0023} \quad \Rightarrow \quad a = 0.00184$

$\Rightarrow \quad y = 0.5878 + 0.00184$， $y = 0.58964 \doteqdot 0.5896$

2.設 $a = \cos 13°$，$b = \sin 23°$，$c = \tan 45°$，$d = \csc 27°$，$e = \cot 37°$。下列何者正確？(複選)

(A) $a < b < c$ (B) $a < c < e$ (C) $b < c < d$ (D) $c < d < e$

(E) $b < d < e$

答案：(B)(C)

解析：

由三角函數定義知：正函數隨角度增加，函數值增加；餘函數隨角度增加，函數值減少。

sin, cos 函數值恆小於 1； sec, csc 函數值恆大於 1； $\tan 45° = \cot 45° = 1$

故 $\sin 23° < \cos 23° < \cos 13° < 1 = \tan 45° < \tan 53° = \cot 37° < \sec 53° < \sec 63° = \csc 27°$

$\Rightarrow \quad b < a < c < e < d$

3.由查表得 $\csc 21°20' = 2.749$，$\csc 21°30' = 2.729$，下列何者正確？

(A) $\csc 21°21' = 2.747$ (B) $\csc 21°22' = 2.742$ (C) $\sec 68°33' = 2.732$

(D) $\sec 68°34' = 2.739$ (E) $\csc 21°26' = 2.735$

答案：(A)

解析：依內插法得，每增加$1'$， $\csc\theta$ 的值減少加 0.002，故選(A)

4.下列有關測量的敘述，何者正確？(複選)

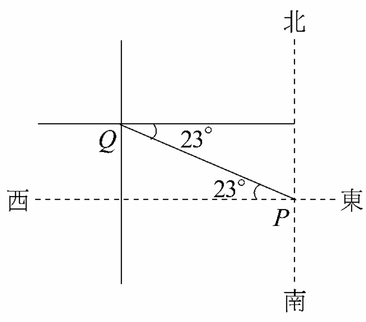
(A)若自點 P 測點 Q 的仰角為 32°，則自點 Q 測得點 P 之俯角為 58°

(B)自地面上 P，Q 兩點測得目標物 R 的俯角各為α，β，若$\alpha > \beta$，則$\overline{PR} > \overline{QR}$

(C)設自地面上四點 P，Q，R，S 測得同一目標的仰角都相同，則 P，Q，R，S 四點共圓

(D)若點 P 在點 Q 的東 23°南，則點 P 在點 Q 的南 67°東

(E)若點 P 在點 Q 的東 23°南，則點 Q 在點 P 的西 23°北



答案：(C)(D)(E)

解析：

(A)自 Q 測得 P 之俯角 ＝ 自 P 測得 Q 之仰角 $= 32°$

(B)距離目標物愈近，所測得仰角愈大 $\therefore \quad \overline{PR} < \overline{QR}$

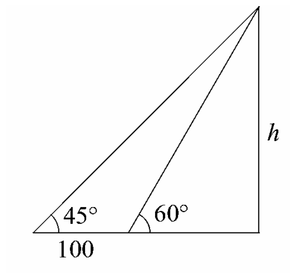
(C)∵　由 P，Q，R，S 測得仰角相同　∴　P，Q，R，S 到目標等距　∴　四點共圓
(D)就方位而言，東 23°南 ＝ 南 67°東
(E)如圖，P 在 Q 的東 23°南　⇔　Q 在 P 的西 23°北

二、填充題(每題 10 分)

5. 某人在A處測得高樓頂之仰角為 45°，前進 100 公尺到B處，再測得仰角為 60°，則樓高為＿＿＿＿＿公尺。

答案：$50(3+\sqrt{3})$

解析：設樓高為 h，則由下圖知



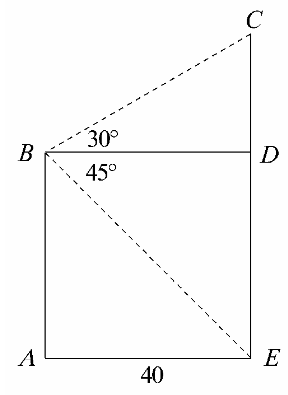
$$h-\frac{h}{\sqrt{3}}=100 \Rightarrow (\sqrt{3}-1)h=100\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow h=\frac{100\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}=50\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)=50(3+\sqrt{3})$$

公式法：$h=\dfrac{100}{\cot 45°-\cot 60°}=\dfrac{100}{1-\dfrac{1}{\sqrt{3}}}=\dfrac{100\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}=50\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)=50(3+\sqrt{3})$

6. 從大馬路旁某大廈一窗口，測得馬路對面另一大廈屋頂的仰角為 30°，屋基的俯角為 45°，已知馬路寬為 40 公尺，求對面大廈的高度為＿＿＿＿＿公尺。

答案：$\dfrac{40\sqrt{3}+120}{3}$



解析：

∵　$\angle DBE=45°$　∴　$\overline{AE}=40=\overline{BD}=\overline{DE}$

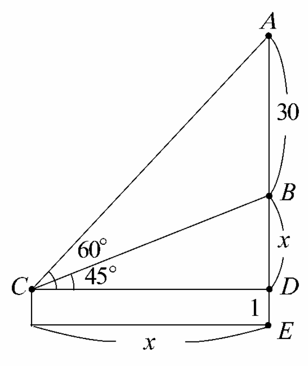
在△CBD 中，$\angle CBD=30°$　∴ $\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\overline{CD}}{\overline{BD}} \Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\overline{CD}}{40}$

$\Rightarrow$　$\overline{CD}=\dfrac{40}{\sqrt{3}}=\dfrac{40\sqrt{3}}{3}$　$\Rightarrow$　$\overline{CE}=\overline{CD}+\overline{DE}=\dfrac{40\sqrt{3}}{3}+40=\dfrac{40\sqrt{3}+120}{3}$

公式法：$40=\dfrac{h}{\cot 45°+\cot 60°} \Rightarrow 40=\dfrac{h}{1+\dfrac{1}{\sqrt{3}}} \Rightarrow 40=\dfrac{h\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}$

$$h=\frac{40(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{3}}=\frac{40(3+\sqrt{3})}{3}$$

7. 小山丘上架設一座高壓電線的鐵塔，塔高 30 公尺，在觀測點C測得塔頂的仰角為 60°，塔底的仰角為 45°，若C點至地面的高度為 1 公尺，且求得塔底離地面的高度為$a+b\sqrt{3}$公尺，（其中a，b為正整數），則數對(a，b) =＿＿＿＿＿。



答案：(16，15)

解析：

令 $\overline{CD}=x$，則 $\overline{BD}=x$，而 $30+x=\sqrt{3}x$ $\quad\therefore\quad x=\dfrac{30}{\sqrt{3}-1}=15(\sqrt{3}+1)$

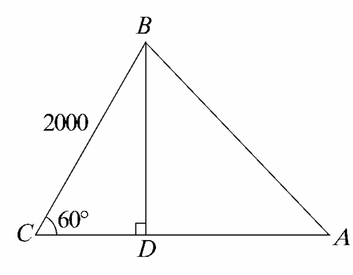
所求 $=\overline{BE}=x+1=16+15\sqrt{3}$ $\quad\therefore\quad (a，b)=(16，15)$

$\boxed{公式法：}$ $x=\dfrac{30}{\cot 30°-\cot 45°}=\dfrac{30}{\sqrt{3}-1}=\dfrac{30(\sqrt{3}+1)}{3-1}=15(\sqrt{3}+1)$

8. 在△ABC中，已知$\angle C=60°$，$\overline{AC}=3000$公尺，$\overline{BC}=2000$公尺，則$\angle A$爲__________度。
（取最接近的整數値，但$\sqrt{3}=1.732$，$\sqrt{7}=2.646$，$\sqrt{21}=4.583$，$\cot 49°20'=0.8591$，$\cot 49°10'=0.8642$，$\cot 49°=0.8693$，$\cot 48°50'=0.8744$，$\cot 48°40'=0.8796$）

答案：41°

解析：如圖，$\angle CBD=30°$，而$\overline{BC}=2000$



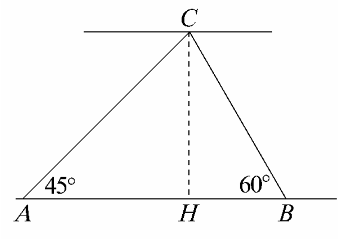
$\therefore\quad \overline{CD}=1000$，$\overline{BD}=1000\sqrt{3}$，

$\overline{DA}=\overline{CA}-\overline{CD}=3000-1000=2000$

$\therefore\quad \tan A=\dfrac{\overline{BD}}{\overline{AD}}=\dfrac{1000\sqrt{3}}{2000}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\fallingdotseq 0.866\fallingdotseq \cot 49°=\tan 41°$

$\therefore\quad \angle A\fallingdotseq 41°$

9. 測量員欲測河流的寬度，在岸邊取兩點A、B，並在對岸取一目標C，若測得$\angle CAB=45°$，$\angle CBA=60°$且$\overline{AB}=100$公尺，則河寬爲__________公尺。



答案：$50(3-\sqrt{3})$公尺

解析：

設河寬$\overline{CH}$爲x公尺，則於△AHC中，$\overline{AH}=\overline{CH}=x$，

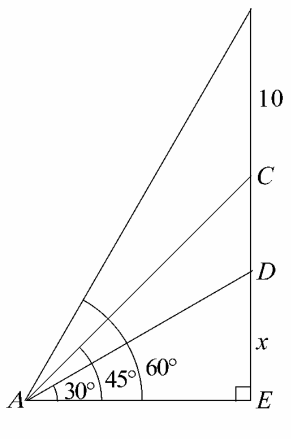
△BHC中，$\angle CBH=60° \Rightarrow \overline{BH}=\dfrac{x}{\sqrt{3}}$，

$\overline{AB}=\overline{AH}+\overline{HB} \quad\Leftrightarrow\quad x+\dfrac{x}{\sqrt{3}}=100 \quad\Leftrightarrow\quad \dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}x=100$

$\Leftrightarrow\quad x=\dfrac{100\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}=50(3-\sqrt{3})$，所以，河寬爲 $50(3-\sqrt{3})$公尺

$\boxed{公式法：}$ $x=\dfrac{100}{\cot 45°-\cot 60°}=\dfrac{100}{1-\dfrac{1}{\sqrt{3}}}=\dfrac{100\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}=50(3-\sqrt{3})$

10. 山上有一塔，塔頂有一旗竿，已知旗竿長 10 公尺，今於地面上某點測得山頂、塔頂、旗竿頂的仰角分別爲 30°，45°，60°，求山高 =__________公尺。



答案：$\dfrac{5(3+\sqrt{3})}{3}$

解析：

在△DAE 中，設$\overline{DE}=x$

$\therefore\quad \angle DAE=30° \Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\overline{DE}}{\overline{AE}}=\dfrac{x}{\overline{AE}} \quad\Rightarrow\quad \overline{AE}=\sqrt{3}x$

在△CAE 中，$\angle CAE = 45°$　$\therefore$　$\overline{AE} = \overline{CE} = \sqrt{3}x$

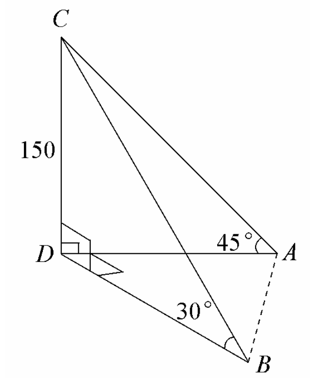
在△BAE 中，$\angle BAE = 60°$　$\therefore$　$\dfrac{\sqrt{3}}{1} = \dfrac{\overline{BE}}{\overline{AE}} = \dfrac{10+\sqrt{3}x}{\sqrt{3}x}$

$\Rightarrow \quad 3x = 10+\sqrt{3}x \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{10}{3-\sqrt{3}} = \dfrac{10(3+\sqrt{3})}{9-3} = \dfrac{5(3+\sqrt{3})}{3}$

11.有一塔高 150 公尺，石頭A在塔的正東方，石頭B在塔的正南方，若自塔頂測得A，B的俯角各爲 45°，30°，則$\overline{AB}$ ＝＿＿＿＿＿公尺。

答案：300

解析：



自A測塔頂的仰角爲 45°，自B測塔頂的仰角爲 30°

如圖，$\overline{AD} = 150$，$\overline{BD} = 150\sqrt{3}$，但$\angle ADB = 90°$

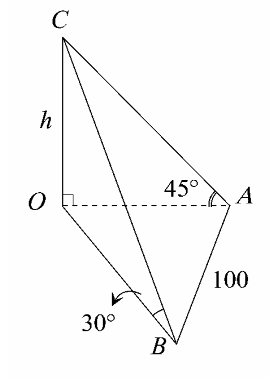
$\therefore \quad \overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 = 150^2(1+3) = 4(150^2)$

$\therefore \quad \overline{AB} = 2 \times 150 = 300$（公尺）

12.自塔的正東A處測得塔頂的仰角爲 45°，自塔的正南B處再測得仰角爲 30°，若$\overline{AB} = 100$ 公尺，則塔高爲＿＿＿＿＿公尺。

答案：50

解析：



設塔高爲h，則$\overline{OA} = h$，$\overline{OB} = \sqrt{3}h$　$\therefore$　$h^2 + 3h^2 = 100^2$

$\Rightarrow \quad 4h^2 = 10000 \quad \Rightarrow \quad h = 50$

13.欲開闢一上山的公路，若坡度爲 45°時，路長爲 1000 公尺，若坡度改爲 30°時，求路長爲＿＿＿＿＿公尺。

答案：$1000\sqrt{2}$

解析：

坡度 45°時，路長爲 1000 公尺　$\therefore$　山高爲 $500\sqrt{2}$ 公尺

再由 30° - 60° - 90°知，坡度爲 30°時，路長 $1000\sqrt{2}$ 公尺

14.已知$\sin 16°40' = 0.2868$，$\sin 16°50' = 0.2896$，設$\sin\theta = 0.2876$，θ爲銳角，則$\theta =$＿＿＿。（以分爲最小單位）

答案：$16°43'$

解析：

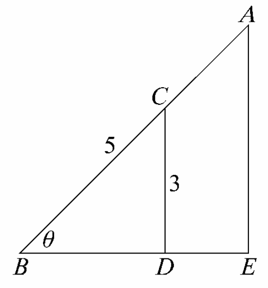
已知 $\sin 16°40' = 0.2868$，$\sin 16°50' = 0.2896$

利用內插法$\dfrac{\theta - 16°40'}{16°50' - 16°40'} = \dfrac{0.2876-0.2868}{0.2896-0.2868} = \dfrac{8}{28}$，　$\theta = 16°40' + \dfrac{8}{28} \times 10' \doteqdot 16°43'$

15.將一長爲 5 公尺之竹竿，斜靠在垂直地面而高爲 3 公尺的牆頭，有部分伸出牆外。假設竹竿與地面所成夾角爲θ，竹竿伸出牆外部分（不計牆的厚度）於日正當中時，在地面

的影長為$a\cot\theta+b\cos\theta$（a、b為常數），則$a=$__________，$b=$__________。

答案：$a=-3$；$b=5$



解析：如圖所示，竹竿$\overline{AB}=5$，牆高$\overline{CD}=3$

而竹竿伸出牆外部分在地面上的投影為$\overline{DE}$，則$\overline{DE}=\overline{BE}-\overline{BD}$

因為ΔABE中，$\cos\theta=\dfrac{\overline{BE}}{5}\Rightarrow\overline{BE}=5\cos\theta$，

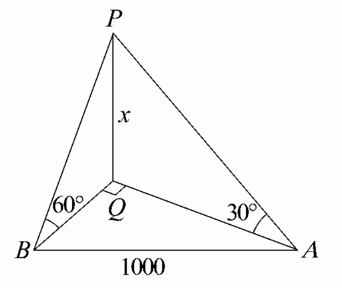
ΔBCD中，$\cot\theta=\dfrac{\overline{BD}}{3}\Rightarrow\overline{BD}=3\cot\theta$，

可得$\overline{DE}=\overline{BE}-\overline{BD}=5\cos\theta-3\cot\theta$，故$a=-3$，$b=5$

16.A，B兩地相距1000公尺，自A點測得正北方一塔頂仰角為30°，自B點測得塔在正東方，塔頂仰角為60°，則

(1)此塔高度為__________公尺。　(2) A點到此塔底之距離為__________公尺。

答案：(1) $100\sqrt{30}$　(2) $300\sqrt{10}$



解析：(1)如圖，設塔高$\overline{PQ}=x$公尺，$\angle PAQ=30°\ \Rightarrow\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\overline{PQ}}{\overline{AQ}}$

$\Rightarrow\overline{AQ}=\sqrt{3}x$公尺，$\angle PBQ=60°\ \Rightarrow\dfrac{\sqrt{3}}{1}=\dfrac{\overline{PQ}}{\overline{BQ}}\Rightarrow\overline{BQ}=\dfrac{x}{\sqrt{3}}$公尺

△ABQ中，$\overline{AQ}^2+\overline{BQ}^2=\overline{AB}^2$

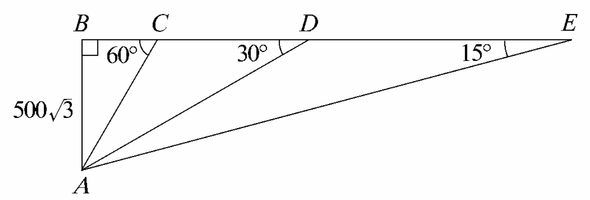
$\therefore\ (\sqrt{3}x)^2+(\dfrac{x}{\sqrt{3}})^2=1000^2\ \Rightarrow\ x^2=300000\ \Rightarrow\ x=100\sqrt{30}$

(2) $\overline{AQ}=\sqrt{3}\times100\sqrt{30}=300\sqrt{10}$公尺

17.一飛機在高度為$500\sqrt{3}$公尺的水平面上等速東飛，地面開始觀測此飛機時，仰角為60°，5秒鐘後再觀測時，仰角只有30°，則：

(1)此飛機的速率為每秒__________公尺。

(2)由仰角30°觀測到仰角15°是經過__________秒。



答案：(1) 200　(2) $5\sqrt{3}$

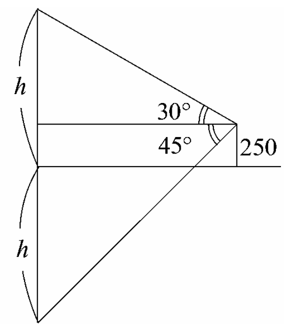
解析：(1)如圖，設由A點觀測到飛機從C點飛到D點

$\angle ACB=60°\ \Rightarrow\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}}=\dfrac{\sqrt{3}}{1}\Rightarrow\overline{BC}=500$，$\angle ADB=30°\ \Rightarrow\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BD}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\ \Rightarrow\overline{BD}=1500$

$\therefore\ \overline{CD}=1500-500=1000$，故飛機的速率=$\dfrac{1000}{5}=200$（公尺 / 每秒）

(2)在△ABD中，$\overline{AD}=1000\sqrt{3}$公尺，在△ADE中，$\overline{DE}=\overline{AD}=1000\sqrt{3}$公尺

$\therefore$　經過了$\dfrac{1000\sqrt{3}}{200}=5\sqrt{3}$秒



18.站在湖中小島的山峰上，看對岸的高峰仰角是30°，看湖面這高峰的鏡影俯角是45°，所站的山峰高度為250公尺（從湖面算起），則對岸高峰的高度為__________公尺。

答案：$250(2+\sqrt{3})$

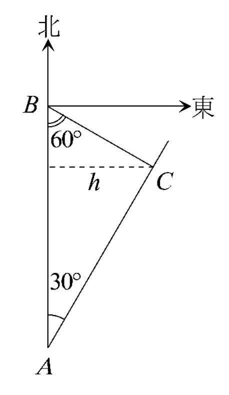
解析：

如上頁圖所示

$\therefore \quad (h-250)\sqrt{3}=h+250 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{3}h-250\sqrt{3}=h+250 \quad \Rightarrow \quad (\sqrt{3}-1)h=250(1+\sqrt{3})$

$\therefore \quad h=\dfrac{250(1+\sqrt{3})}{(\sqrt{3}-1)}=\dfrac{250(1+\sqrt{3})^2}{2}=250(2+\sqrt{3})$

19.一船向北航行，在北 30°東的方位發現一燈塔後，繼續向北前進 5 公里，此時，燈塔的方位爲南 60°東，則該船航線與燈塔的最短距離爲多少公里？



答案：$\dfrac{5}{4}\sqrt{3}$ 公里

解析：

$\because \quad \overline{AB}=5$，$\triangle ABC$ 爲 $30°$，$60°$，$90°$ 的直角三角形

$\therefore \quad \dfrac{1}{2}=\dfrac{\overline{AC}}{5} \quad \Rightarrow \quad \overline{AC}=\dfrac{5}{2}$，$\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\overline{BC}}{5} \quad \Rightarrow \quad \overline{BC}=\dfrac{5}{2}\sqrt{3}$

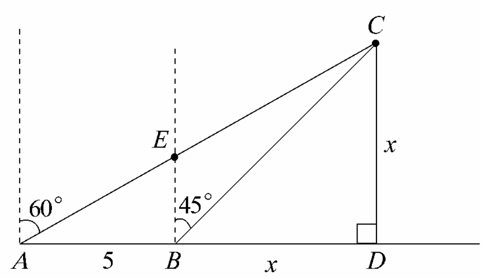
設最短距離 h 公里(即斜邊上的高)

$\because \quad \overline{AC}\times\overline{BC}=\overline{AB}\times h \Rightarrow h=\dfrac{\overline{AC}\times\overline{BC}}{\overline{AB}} \quad h=\dfrac{\frac{5}{2}\times\frac{5}{2}\sqrt{3}}{5} \quad \Rightarrow \quad h=\dfrac{5}{4}\sqrt{3}$

20.海中有一小島，其四周 8 浬內鋪設水雷，今有一船自西向東行駛，於 A 點見島在北 60°東，繼續行駛 5 浬，見島在其北 45°東，若此船航向不變，則此船是否會觸及水雷？

答案：會觸及水雷

解析：



如圖，令 $\overline{CD}=\overline{BD}=x$

由 $\triangle ABE \sim \triangle ADC \quad \therefore \quad \dfrac{\overline{AB}}{\overline{AD}}=\dfrac{\overline{BE}}{\overline{DC}} \quad \therefore \quad \dfrac{5}{x+5}=\dfrac{\frac{5}{\sqrt{3}}}{x}$

$\therefore \quad x=\dfrac{5}{\sqrt{3}-1}=\dfrac{5}{2}(\sqrt{3}+1) \doteqdot 6.8<8 \quad \therefore \quad$ 會觸及水雷

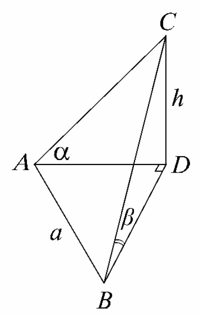
$\boxed{\text{公式法}}$：$h=\dfrac{5}{\cot 30°-\cot 45°}=\dfrac{5}{\sqrt{3}-1}=\dfrac{5(\sqrt{3}+1)}{3-1}=\dfrac{5\times 2.732..}{2}=6.\cdots<8$

21.有一人在一塔的正東 A 處，測得塔頂的仰角爲 α。此人走到塔的正南 B 處，再測得塔頂的仰角爲 β。若 A，B 之距離爲 a，則此塔之高爲__________。

答案：$\dfrac{a}{\sqrt{\cot^2\alpha+\cot^2\beta}}$

解析：

設塔高 $\overline{CD}=h$，則 $\overline{AD}=h\cot\alpha$，$\overline{BD}=h\cot\beta \quad \therefore \quad \overline{AB}^2=\overline{AD}^2+\overline{BD}^2$



$\Rightarrow \quad a^2=h^2\cot^2\alpha+h^2\cot^2\beta$

$\Rightarrow \quad h^2=\dfrac{a^2}{\cot^2\alpha+\cot^2\beta}$

$\Rightarrow \quad h=\dfrac{a}{\sqrt{\cot^2\alpha+\cot^2\beta}}$